Erster Abschnitt.

Vom Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln.

Vom Ausziehen der Quadratwurzeln.

§. 171.

Wenn eine unbenannte Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, so nennt man das Produkt das Quadrat dieser Zahl. So ist 4 das Quadrat von 2, weil $2 \times 2 = 4$, 36 das Quadrat von 6, weil $6 \times 6 = 36$, und 361 das Quadrat von 19, weil $19 \times 19 = 361$ ist. Die mit sich selbst multiplicirte Zahl heißt die Quadratwurzel; mithin sind die Zahlen 2, 6 und 19 die Quadratwurzeln von 4, 36 und 361.

§. 172.

Druckt man die Quadratwurzel durch einen Reihe von so vielen Punkten aus, als die Wurzel Einheiten

Erster Abschnitt.

Vom Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln.

Vom Ausziehen der Quadratwurzeln.

§. 171.

Wenn eine unbenannte Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, so nennt man das Produkt das Quadrat dieser Zahl. So ist 4 das Quadrat von 2, weil $2 \times 2 = 4$, 36 das Quadrat von 6, weil $6 \times 6 = 36$, und 361 das Quadrat von 19, weil $19 \times 19 = 361$ ist. Die mit sich selbst multiplicirte Zahl heißt die Quadratwurzel; mithin sind die Zahlen 2, 6 und 19 die Quadratwurzeln von 4, 36 und 361.

§. 172.

Druckt man die Quadratwurzel durch einen Reihe von eben so vielen Punkten aus, als die Wurzel Einheiten

hat, so wird man das Quadrat dadurch bezeichnen müssen, daß man eben so viele gleich große Reihen unter einander setzt, als die Wurzelreihe Punkte hat. Es seye z. B. die Wurzel 5, so ist die Wurzelreihe diese:

\- - - - -

und das Quadrat von 5, oder 25 bildet sodann folgende Figur:

\- - - - -
\- - - - -
\- - - - -
\- - - - -
\- - - - -

Eine solche Figur heißt bekanntlich ein Quadrat, daher der Name solcher Zahlen.

§. 173.

Zu einer gegebenen Quadratzahl ihre Wurzel finden, heißt die Quadratwurzel ausziehen.

§ 174.

Die Quadrate der 9 einfachen Zahlen giebt das Ein mal Eins an.

Sie sind	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
und ihre Wurzeln	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

Diese 9, nur aus Einer Ziffer bestehende Wurzeln heißen Einzifferigte Wurzeln. Besteht hingegen die Wurzel aus 2, 3, 4 ꝛc. ꝛc. Ziffern, so heißt sie auch eben so viel zifferigt. *)

Die kleinste 2 zifferigte ist 10 und ihr Quadrat 100, die größte 99 und ihr Quadrat 9801. Die kleinste 3ziffe=rigte ist 100 und ihr Quadrat 10000, die größte ;99, und ihr Quadrat 998001 ꝛc. ꝛc. Aus diesem erhellt:

1) daß das Quadrat einer Einzifferigten Wurzel nicht mehr als 2 und nicht weniger als 1 Ziffer, das einer zweizifferigten nicht mehr als 4 und nicht weniger als 3, das einer 3zifferigten nicht mehr als 6 und nicht weniger als 5 — kurz, das Quadrat irgend einer Wurzel nicht mehr Zif=fern haben kann, als zweimal so viel, als die Wurzel hat, und nicht weniger, als zweimal so viel, als die Wurzel hat, weniger 1.

2) daß, da das Quadrat von 10 = 100 ist, die Anzahl der Ziffern des Quadrats jedesmal um 2 zunimmt, wenn man an die Wurzel Eine Null anhängt. So ist das Quadrat von 3 = 9

= = = 30 = 900

= = = 300 = 90000

*) Beym folgenden § mache man den Schüler auf den Unterschied zwischen 2 ꝛc. ꝛc. zifferigten und 2 ꝛc. ꝛc. theiligen Wurzeln besonders aufmerksam.

3) daß die Anzahl der Ziffern des Quadrats wenigstens um 2 zunehmen muß, aber auch um 3 zunehmen kann, wenn an die Wurzeln eine wirkliche Ziffer angehängt wird.

So ist das Quadrat von 3 = 9
" " " 31 = 961
" " " 35 = 1225
" " " 39 = 1521.

4) daß man aus der Anzahl der Ziffern des Quadrats die Anzahl der Ziffern der Wurzel abnehmen kann, wenn man das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Classen theilt, und jeder Classe 2 Ziffern giebt, von denen jedoch die letzte zur Linken auch nur Eine haben kann. So viele Classen das Quadrat hat, eben so viele Ziffern hat die Wurzel. So hat das Quadrat 1 | 59 | 21 | eine dreizifferigte, und das Quadrat 84|84|25|21| eine vierziffertgte Wurzel.

§. 175.

Eine durch 2 oder mehrere mit dem + Zeichen verbundene Posten ausgedruckte Wurzel heißt eine 2, 3 ꝛc. ꝛc. theilige Wurzel. So ist 3 + 1 oder 7040 + 9 oder 5 + 17 eine zweitheilige; 6 + 5 + 2 oder 60 + 5 + 1 eine dreitheilige Wurzel ꝛc. ꝛc. Da sich nun jede Zahl leicht in Posten zerlegen läßt; so kann auch jede 1 oder mehr zifferigte Wurzel in eine zwei = oder beliebig mehrtheilige verwandelt werden.

Bey Wurzeln, die aus 2 oder mehreren wirklichen Ziffern bestehen, geschieht dieß am natürlichsten dadurch daß man an jede so viele Nullen anhängt, als zur rechten Hand Ziffern auf sie folgen, und diese Posten sodann durch das + Zeichen verbindet. Auf diese Art ist

$$17 = 10 + 7$$
$$521 = 500 + 20 + 1$$
$$3157 = 3000 + 100 + 50 + 7.$$

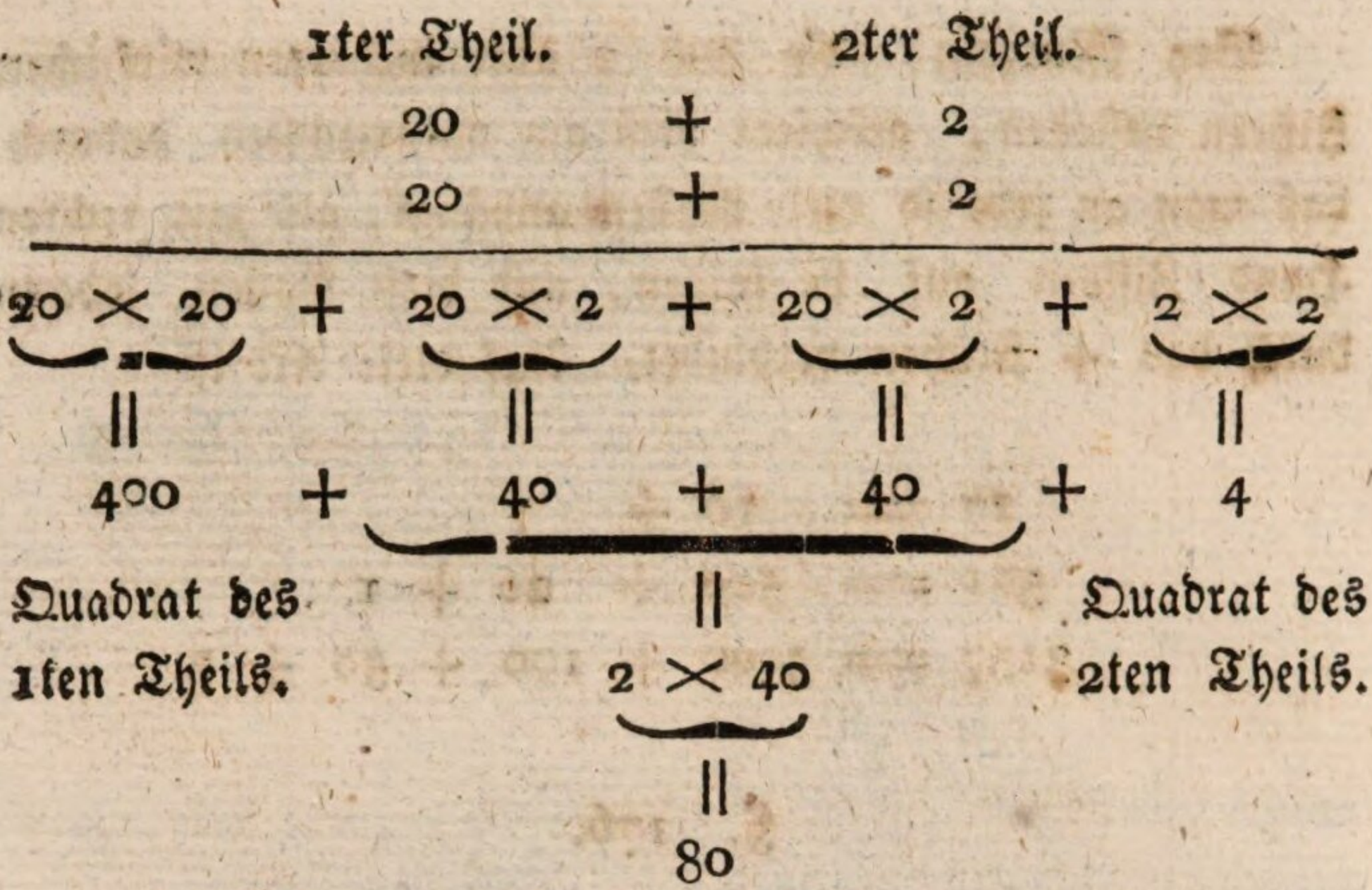
§. 176.

Man multiplicire die Wurzel 22 mit sich selbst, so erhält man

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline \end{array}$$

das Quadrat 484

Dasselbe wird durch Multiplication der der Wurzel 22 gleichen zweitheiligen Wurzel 20 + 2 mit sich selbst erhalten, wenn man die Posten einzeln mit einander multiplicirt, unnd sodann die einzeln Produkte addirt, wie aus folgender Darstellung zu ersehen:



Addition.

Quadrat des 1ten Theils = 400
Dopp. Prod. beyder Theile = 80
Quadrat des 2ten Theils = 4

484

Auf gleiche Weise verfahre man mit der Wurzel $99 = 90 + 9$.

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

1ter Theil.		2ter Theil.
90	+	9
90	+	9

90 × 90	+	90 × 9	+	90 × 9	+	9 × 9
‖		‖				‖
8100	+	2 × 810			+	81
		‖				
Q. d. 1ten Theils.		1620 D. Pr. beyder Theile.				Q. d. 2ten Theils.

Addition.

Quadrat des 1ten Theils = 8100
Dopp. Prod. beyd. Theile = 1620
Quadrat des 2ten Theils = 81

9801

Aus diesen beyden Beyspielen ist ersichtlich, daß das Quadrat einer jeden 2zifferigten Wurzel, wenn man sie als eine 2theilige betrachtet, bey welcher der 1te Theil aus den Zehnern, der zweite aus den Einern besteht,

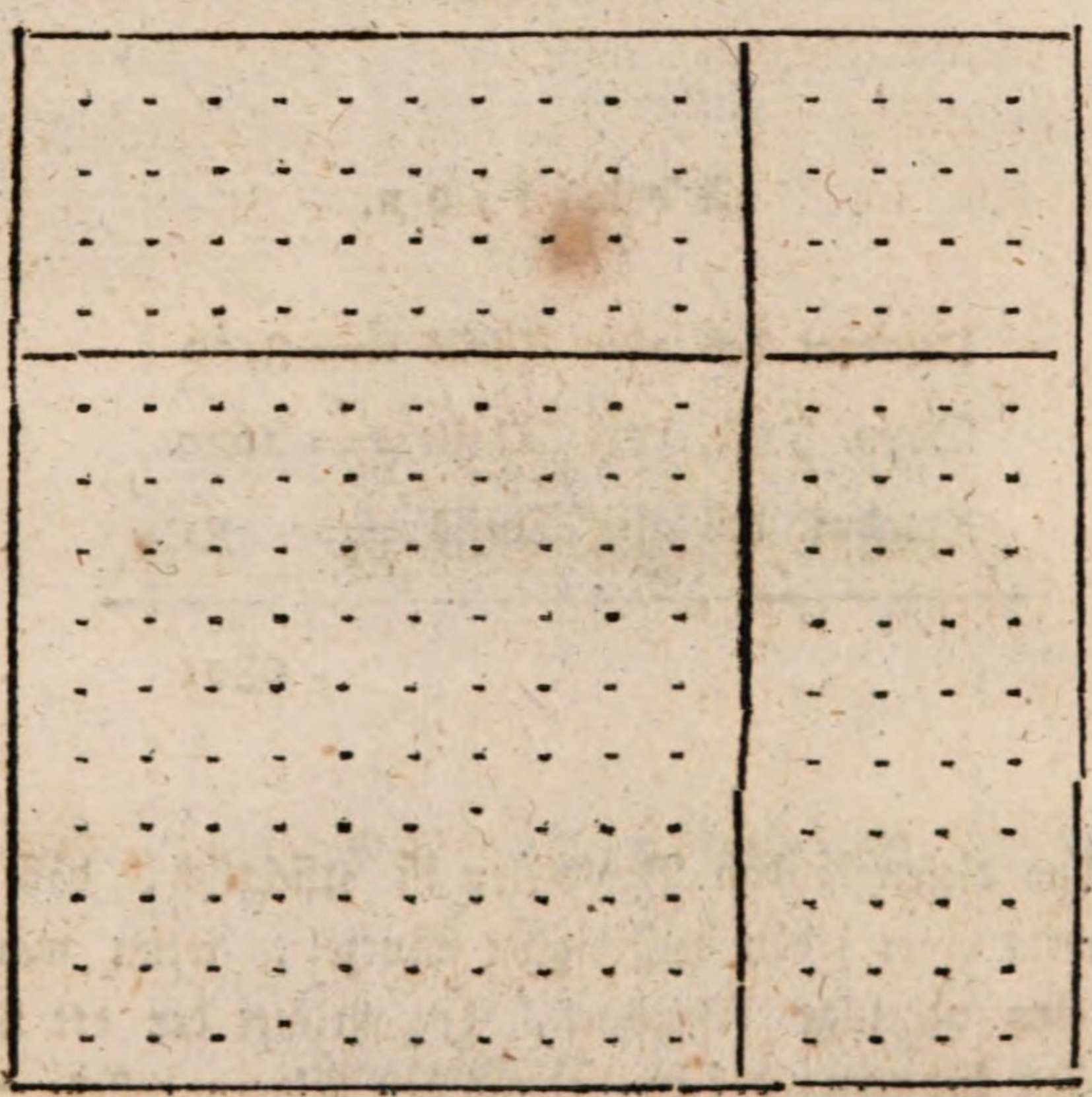
1) das Quadrat des 1ten Theils,

2) das doppelte Produkt des 2ten Theils in den 1ten und

3) das Quadrat des 2ten Theils enthalte; *)

---

*) Sinnliche Darstellung dieses Satzes durch folgende Figur:



§. 177.

Daß ferner im ganzen Quadrat

1) das Quadrat des 2ten Theils in der Stelle der Einer allein stehen kann (wie im 1ten Beyspiel 4) sich aber auch öfters in die Stelle der Zehner erstrecke (wie im 2ten Beyspiel 81),

2) daß die niedrigste wirkliche Ziffer des doppelten Produkts beyder Theile (wie 8 im 1ten und 2 im zweiten Beyspiel) immer in der Stelle der Zehner anzutreffen sey, und daß dieß doppelte Produkt sich zwar nicht über die Stelle der Zehner hinaus erstrecken müsse (1tes Beyspiel) sich aber bis in die Stelle der Tausender, jedoch nicht weiter erstrecken könne (2tes Beyspiel),

3) daß endlich das Quadrat des 1ten Theils (nämlich seine wirklichen Ziffern) (wie im 1ten Beyspiele) allein in der Stelle der Hunderter stehen, sich aber auch (wie im 2ten Beyspiele) bis in die Stelle der Tausender, jedoch nicht drüber erstrecken kann.

§. 178.

Theilt man nun das Quadrat irgend einer 2zifferigten Wurzel, so, wie es oben angegeben wurde, in Klassen von der Rechten zur Linken; so erhält man 2 Klassen,

von welchen die rechte immer 2, die Linke aber bisweilen nur Eine Ziffer hat.

4 | 8 4 | 9 8 | 0 1 |

Das wirkliche Ausziehen der Wurzel geschieht nunmehr nach folgenden, auf den vorigen § beruhenden Regeln:

1) Suche vermittelst des Ein mal Eins oder aus dem oben angegebenen Täfelchen das größte Quadrat einer einfachen Zahl, das sich von der linken Classe noch abziehen läßt. An die dazu gehörige Einzifferigte Wurzel hänge eine Null, so hast du den 1ten Theil der Wurzel, welcher hinter die rechte Classe gesetzt wird.

4 | 8 4 || 2 0 erster Theil der Wurzel.

9 8 | 0 1 || 9 0 erster Theil der Wurzel.

2) Das Quadrat dieses 1ten Theils schreibe unter das ganze Quadrat, und ziehe ab.

Ganzes Quadrat	4	84	20 erster Theil der Wurzel.
Quadr. d. 1ten Theils	4	00	
Rest		84	

G. D.	98	01	90 erster Th. d. W.
D. d. 1ten Theils	81	00	
Rest	17	01	

3.) Multiplicire den 1ten Theil der Wurzel mit 2 und dividire auf der Seite oder im Kopf mit diesem Product in den Rest von N°. 2. Der Quotient ist der 2te Theil der Wurzel, welcher unter die o des 1ten Theils geschrieben, und zu demselben addirt wird, um die ganze Wurzel zu erhalten.

1tes Beyspiel.

4	84	20 erster Theil d. W.
4	00	2 zweiter Theil d. W.
	84	22 ganze W.

Nebenrechnung.

Rest von N°. 2 =	84	40 dopp. 1ter Theil.
Dopp. Prod. beyd. Theile	80	2 zweiter Theil.
Quadr. d. 2t. Theils	4	

§. 179.

Das im vorigen §. der Deutlichkeit wegen gewählte, weitläuftige Verfahren ist in der Ausübung nicht nöthig. Kürzer steht die Rechnung so:

1tes Beyspiel.

			erster, zweiter Theil.
Ganzes Quadrat	=	4|84	2 2
Quadr. d. 1ten Theils	=	4	
Rest	=	84	
Doppelter 1ter Theil	=	4	
2ter Theil	=	2	
Dopp. Pr. beyd. Theile + dem Quadr. d. 2ten Theils	=	84	
Rest		0	

Und noch etwas kürzer so:

2tes Beyspiel.

			erster, zweiter Theil.
Ganzes Quadrat	=	98|01	9 9
Quadr. d. 1t. Theils	=	81	
Rest	=	17|01	
Dopp. 1t. Theil + dem 2t. Theil		1|89	
Dopp. Prod. beyd. Theile + dem Quadr. d. 2ten Theils	=	17|01	
Rest *)		0	

§. 180.

Hat das Quadrat mehr als 2 Klassen, so hat auch die Wurzel mehr als 2 Ziffern. Nun könnte man sich

---

*) Mündliche Erläuterung, hauptsächlich über das Untersetzen des doppelten 1ten unter die linke und des 2ten Theils unter die rechte Ziffer der 2ten Classe, mit Beziehung auf §. 177.

zwar dieselbe als eine mehrtheilige Wurzel vorstellen, könnte die Bestandtheile der Quadrate von 3, 4, 5 ꝛc. theiligen Wurzeln eben so aufsuchen, wie wir es bey einer 2theiligen Wurzel gemacht haben, und daraus die Regeln fürs Ausziehen ableiten.

Dieser Weitläuftigkeit entgeht man auf folgende Art:

1.) Behandle die 2 linken Klassen eines mehrklassigten Quadrats, als ob sie allein da wären, und finde dadurch die zwei erstern Ziffern der Wurzel.

2. Zu dem Rest, der in N°. 1. bleibt, rucke die nächste, weiter rechts stehende Klasse herab; siehe die 2 ersten (nach N°. 1 gefundenen) Ziffern der Wurzeln zusammen als den ersten Theil derselben an, nehme ihn doppelt, kurz, verfahre damit auf die bekannte Art, und finde so die 3te Ziffer der Wurzel (1tes Beyspiel.)

3.) Diese 3 Ziffern der Wurzel sehe abermals zusammen als den 1ten Theil derselben an, und wiederhohle so das nämliche Verfahren so lange, bis die letzte Classe herabgeruckt ist, und o zum Rest bleibt (2tes Beyspiel.)

4.) Kann zuweilen mit dem doppelten 1ten Theil in den Rest nicht dividirt werden, weil er größer als dieser; so setze in die Wurzel eine Null, und rucke sogleich die nächste Klasse herab. Die bereits

gefundenen Ziffern der Wurzel machen sodann mit dieser angehängten o zusammen den 1ten Theil aus (3tes Beyspiel.)

1tes Beyspiel.

erster
erster, zweiter, zweiter Theil.

11	90	25	3	4	5	
9						
2	90					
	64					
2	56					
	34	25				
	6	85				
	34	25				
		0				

2tes Beyspiel.

erster
erster
erster, zweiter, zweiter, zweiter Theil.

2	96	18	41	1	7	2	1
1							
1	96						
	27						
1	29						
	7	18					
	3	42					
	6	84					
		34	41				
		34	41				
		34	41				
			0				

3tes Beyspiel.

erster

erster, zweiter, zweiter Theil.

16	72	81	4	0	9
16					
	72				
	80				
	72	31			
	8	09			
	72	81			
	0				

§. 181.

Die Probe des Quadratwurzelausziehens besteht darinn, daß man die gefundene Wurzel mit sich selbst multiplicirt, weil dadurch, wenn nicht gefehlt worden, im Product das vorige Quadrat wieder erscheinen muß.

§. 182.

Soll aus einer ganzen Zahl, die kein Produkt einer andern ganzen Zahl in sich selbst ist, die Quadratwurzel ausgezogen werden, z. B. aus 17 oder aus 172; so liegt die Wurzel zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen, bey 17 zwischen 4 und 5, indem 4 zu klein und 5 zu groß ist, und bey 172 zwischen 13 und 14, aus demselben Grund. Die Wurzel einer solchen Zahl ist also immer eine vermischte Zahl oder ein uneigentlicher Bruch, dessen Nenner im Zähler nicht aufgeht. Dieser Bruch ist aber von der Art, daß er durch Zahlen

nie vollkommen ausgedruckt werden kann, daher dergleichen Wurzeln irrationale Wurzeln heißen, Wurzeln, zu denen die Einheit kein bestimmt anzugebendes Verhältniß hat — ein Ausdruck, der erst im folgenden Abschnitt ganz verständlich werden kann.

§. 183.

Um aber doch dergleichen Wurzeln so genau, als man nur will, durch Zahlen auszudrucken, bedient man sich der Decimalbrüche. Hängt man nämlich, nachdem aus dem gegebenen unvollkommenen Quadrat, z. B. aus 172, die Ganzen der Wurzel auf dem gewöhnlichen Wege ausgezogen worden sind, an den übrigbleibenden Rest 2 Nullen, so wird derselbe dadurch mit 100 multiplicirt, und folglich muß die fernere Wurzelziffer, die aus ihm gezogen wird, wenn man sie als eine ganze Ziffer ansehen wollte, 10mal zu groß seyn, da bekanntlich die Quadratwurzel aus $100 = 10$ ist. Diese Ziffer kann mithin nur Zehntel der Einheit bedeuten, und nimmt daher die erste Stelle hinter dem Comma ein. Fährt man auf diese Weise mit dem Anhängen eines Nullenpaars an den jedesmaligen Rest fort, so erhält man aus demselben Grunde 100stel, 10000stel ꝛc. der Wurzel, welches Verfahren ohne Ende fortgesetzt werden kann, aber nur so weit fortgesetzt wird, als es die Wichtigkeit der Rechnung erfodert. Man nennt dieses Verfahren Annäherung.

| 1 | 72 | 13, 114 = 13 $\frac{114}{1000}$.
1		
	72	
	23	
	69	
	3	00
	2	61
	39	00
	26	21
12	79	00
2	62	24
10	48	96
2	30	04

§. 184.

Das Ausziehen einer solchen irrationalen Wurzel wird geprüft, wenn man den erhaltenenen Decimalbruch (nach §. 166.) mit sich selbst multiplicirt, und zum Produkt den letzten Rest addirt, wodurch das gegebene unvollkommene Quadrat mit eben so viel Nullen, als angehängt wurden, wieder erscheinen muß.

§. 185.

Das Zeichen, welches anzeigt, daß aus irgend einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, ist ein verzogenes kleines lateinisches r, der Anfangsbuchstabe von radix, und sieht so aus $\sqrt{}$. Die 2 Striche desselben heißen die Arme des Wurzelzeichens, von welchen der rechte zuweilen verlängert wird, wenn die Wurzel aus einer

Zahl gezogen werden soll, die aus 2 oder mehrern durch + oder — verbundenen Theilen besteht.

$$\sqrt{5}; \qquad \sqrt{16894}; \qquad \sqrt{7 \times 3};$$

$$\sqrt{\overline{6 + 1 - 5}} \text{ oder } \sqrt{(6 + 1 - 5)}.$$

§. 186.

Soll aus einem gemeinen Bruch, er sey ein eigentlicher oder uneigentlicher, die Quadratwurzel gezogen werden, so verwandelt man ihn entweder in einen Decimalbruch, und verfahrt sodann nach dem folgenden §.; oder man zieht aus dem Zähler sowohl als aus dem Nenner die Wurzel, und erhält dadurch den Zähler und Nenner des Wurzelbruchs.

Es ist $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$;

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{2,2360};$$

$$\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{2,6457}{3};$$

$$\sqrt{\frac{34}{35}} = \frac{5,830}{5,916}.$$

Soll hingegen nur aus dem Zähler oder nur aus dem Nenner eines Bruchs die Wurzel gezogen werden; so wird auch das Zeichen blos zum einen oder zum andern geschrieben.

Es ist $\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1,414}{5}$;

$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{3,1022}$.

Soll aus dem ganzen Bruch die Wurzel gezogen werden, und sind Zähler sowohl als Nenner unvollkommene Quadrate, so multiplicire man beyde zuvor entweder mit dem Zähler oder mit dem Nenner, wodurch der eine oder der andere zum vollkommenen Quadrat, und mithin die Arbeit erleichtert wird.

So ist $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \frac{2}{2,449}$;

oder $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{2,449}{3}$.

§. 187.

Aus einem Decimalbruch wird die $\sqrt{}$ gezogen, wenn man, insofern die Zahl der Decimalstellen ungerade ist, eine Null angehängt, wie gewöhnlich in Classen eintheilt, verfährt, als ob es eine ganze Zahl wäre, und endlich in der Wurzel halb so viel Ziffern durchs Comma von der Rechten gegen die Linke abschneidet, als der Decimalbruch Stellen hat.

Beyspiele.

1.) $\sqrt{0{,}42571} = 0{,}652.$

42	57	10	652
36			
6	57		
1	25		
6	25		
	32	10	
	13	02	
	26	04	
	6	06	

Prüfung.

0,652
0,652

1304
3260
3912

0,425104
606

0,425710

2.) $\sqrt{5{,}21} = 2{,}2$

Auch hier findet durch Anhängung von Nullen ein weiteres Aufsuchen der Wurzeldecimalstellen Statt. So ist

$\sqrt{1{,}5} = 1{,}22.$

§. 188.

Warum man bey Ausziehung der √ aus einem Decimalbruch nach der Regel des vorigen §. verfahren müsse, erhellt ganz deutlich, sobald man den Decimalbruch wie einen gemeinen Bruch ausdruckt, und sodann nach §. 186 extrahirt.

Beyspiel.

$$\sqrt{5,21} = \sqrt{\frac{521}{100}} = \frac{\sqrt{521}}{\sqrt{100}} = \frac{22}{10} = 2,2.$$

Vom Ausziehen der Kubikwurzeln.

§. 189.

Wenn eine unbenannte Zahl zweimal mit sich selbst, d. h. das Quadrat derselben noch einmal mit seiner Wurzel multiplicirt wird; so nennt man das Produkt den Kubus oder Würfel dieser Zahl. So ist 8 der Kubus von 2, weil $2 \times 2 \times 2 = 8$ ist. Die mit sich selbst zweimal multiplicirte Zahl heißt die Kubikwurzel.

§. 190.

Der Name Kubus oder Kubikzahl kommt von der körperlichen Figur gleiches Namens her, indem dergleichen Zahlen, wenn man die Wurzel, wie oben im §. 172

nie vollkommen ausgedruckt werden kann, daher dergleichen Wurzeln irrationale Wurzeln heißen, Wurzeln, zu denen die Einheit kein bestimmt anzugebendes Verhältniß hat — ein Ausdruck, der erst im folgenden Abschnitt ganz verständlich werden kann.

§. 183.

Um aber doch dergleichen Wurzeln so genau, als man nur will, durch Zahlen auszudrucken, bedient man sich der Decimalbrüche. Hängt man nämlich, nachdem aus dem gegebenen unvollkommenen Quadrat, z. B. aus 172, die Ganzen der Wurzel auf dem gewöhnlichen Wege ausgezogen worden sind, an den übrigbleibenden Rest 2 Nullen, so wird derselbe dadurch mit 100 multiplicirt, und folglich muß die fernere Wurzelziffer, die aus ihm gezogen wird, wenn man sie als eine ganze Ziffer ansehen wollte, 10mal zu groß seyn, da bekanntlich die Quadratwurzel aus $100 = 10$ ist. Diese Ziffer kann mithin nur Zehntel der Einheit bedeuten, und nimmt daher die erste Stelle hinter dem Comma ein. Fährt man auf diese Weise mit dem Anhängen eines Nullenpaars an den jedesmaligen Rest fort, so erhält man aus demselben Grunde 100stel, 10000stel ꝛc. der Wurzel, welches Verfahren ohne Ende fortgesetzt werden kann, aber nur so weit fortgesetzt wird, als es die Wichtigkeit der Rechnung erfodert. Man nennt dieses Verfahren Annäherung.

| 1 | 72 | 13, 114 = 13 $\frac{114}{1000}$.
1		
	72	
	23	
	69	
	3	00
	2	61
	39	00
	26	21
12	79	00
2	62	24
10	48	96
2	30	04

§. 184.

Das Ausziehen einer solchen irrationalen Wurzel wird geprüft, wenn man den erhaltenenen Decimalbruch (nach §. 166.) mit sich selbst multiplicirt, und zum Produkt den letzten Rest addirt, wodurch das gegebene unvollkommene Quadrat mit eben so viel Nullen, als angehängt wurden, wieder erscheinen muß.

§. 185.

Das Zeichen, welches anzeigt, daß aus irgend einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, ist ein verzogenes kleines lateinisches r, der Anfangsbuchstabe von radix, und sieht so aus $\sqrt{}$. Die 2 Striche desselben heißen die Arme des Wurzelzeichens, von welchen der rechte zuweilen verlängert wird, wenn die Wurzel aus einer

Zahl gezogen werden soll, die aus 2 oder mehrern durch + oder — verbundenen Theilen besteht.

$\sqrt{5}$; $\sqrt{16894}$; $\sqrt{7 \times 3}$;

$\sqrt{\overline{6 + 1 - 5}}$ oder $\sqrt{(6 + 1 - 5)}$.

§. 186.

Soll aus einem gemeinen Bruch, er sey ein eigentlicher oder uneigentlicher, die Quadratwurzel gezogen werden, so verwandelt man ihn entweder in einen Decimalbruch, und verfahrt sodann nach dem folgenden §.; oder man zieht aus dem Zähler sowohl als aus dem Nenner die Wurzel, und erhält dadurch den Zähler und Nenner des Wurzelbruchs.

Es ist $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$;

$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{2,2360}$;

$\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{2,6457}{3}$;

$\sqrt{\frac{34}{35}} = \frac{5,830}{5,916}$.

Soll hingegen nur aus dem Zähler oder nur aus dem Nenner eines Bruchs die Wurzel gezogen werden; so wird auch das Zeichen blos zum einen oder zum andern geschrieben.

Es ist $\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1,414}{5}$;

$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{3,1022}$.

Soll aus dem ganzen Bruch die Wurzel gezogen werden, und sind Zähler sowohl als Nenner unvollkommene Quadrate, so multiplicire man beyde zuvor entweder mit dem Zähler oder mit dem Nenner, wodurch der eine oder der andere zum vollkommenen Quadrat, und mithin die Arbeit erleichtert wird.

So ist $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \frac{2}{2,449}$;

oder $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{2,449}{3}$.

§. 187.

Aus einem Decimalbruch wird die $\sqrt{}$ gezogen, wenn man, insofern die Zahl der Decimalstellen ungerade ist, eine Null angehängt, wie gewöhnlich in Classen eintheilt, verfährt, als ob es eine ganze Zahl wäre, und endlich in der Wurzel halb so viel Ziffern durchs Comma von der Rechten gegen die Linke abschneidet, als der Decimalbruch Stellen hat.

Beyspiele.

1.) $\sqrt{0{,}42571} = 0{,}652.$

42	57	10	652
36			
6	57		
1	25		
6	25		
	32	10	
	13	02	
	26	04	
	6	06	

Prüfung.

0,652
0,652

1304
3260
3912

0,425104
606

0,425710

2.) $\sqrt{5{,}21} = 2{,}2$

Auch hier findet durch Anhängung von Nullen ein weiteres Aufsuchen der Wurzeldecimalstellen Statt. So ist

$\sqrt{1{,}5} = 1{,}22.$

§. 188.

Warum man bey Ausziehung der √ aus einem Decimalbruch nach der Regel des vorigen §. verfahren müsse, erhellt ganz deutlich, sobald man den Decimalbruch wie einen gemeinen Bruch ausdruckt, und sodann nach §. 186 extrahirt.

Beyspiel.

$$\sqrt{5,21} = \sqrt{\frac{521}{100}} = \frac{\sqrt{521}}{\sqrt{100}} = \frac{22}{10} = 2,2.$$

Vom Ausziehen der Kubikwurzeln.

§. 189.

Wenn eine unbenannte Zahl zweimal mit sich selbst, d. h. das Quadrat derselben noch einmal mit seiner Wurzel multiplicirt wird; so nennt man das Produkt den Kubus oder Würfel dieser Zahl. So ist 8 der Kubus von 2, weil $2 \times 2 \times 2 = 8$ ist. Die mit sich selbst zweimal multiplicirte Zahl heißt die Kubikwurzel.

§. 190.

Der Name Kubus oder Kubikzahl kommt von der körperlichen Figur gleiches Namens her, indem dergleichen Zahlen, wenn man die Wurzel, wie oben im §. 172

als eine Reihe von Punkten ausdruckt, diese Figur bilden. *)

§. 191.

Zu einer gegebenen Kubikzahl ihre Wurzel finden, heißt, die Kubikwurzel ausziehen.

§. 192.

Die Kubi der neun einfachen Zahlen sind

1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.
u. ihre W.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

Wie es Ein- und mehrzifferigte Quadratwurzeln gab, so giebt es auch dergleichen Kubikwurzeln. Aus den Kubis der kleinsten und größten, Ein- zwei- und dreiziffrigten Wurzeln erhellt.

1.) Daß der Kubus irgend einer Wurzel nicht mehr Ziffern haben kann, als dreimal so viel, als die Wurzel hat, und nicht weniger, als dreimal so viel, als die Wurzel hat, weniger 2.

2.) Daß, da der Kubus von $10 = 1000$ ist, die Anzahl der Ziffern des Kubus jedesmal um 3 zunimmt, wenn an die Wurzel Eine Null angehängt wird.

---

*) Versinnlichung.

3.) Daß die Anzahl der Ziffern des Kubus wenigstens um 3 zunehmen muß, aber auch um 4 zunehmen kann, wenn man an die Wurzel eine wirkliche Ziffer anhängt.

4.) Daß man aus der Anzahl der Ziffern des Kubus die Anzahl der Ziffern der Wurzel abnehmen kann, wenn man den Kubus von der Rechten gegen die Linke in Classen theilt, und jeder Classe 3 Ziffern giebt, von welchen jedoch die letzte auch nur 2 oder Eine haben kann.

§. 193.

Ein- und mehrtheilige Kubikwurzeln; Verwandlung zwei- und mehrzifferigter in zwei- und mehrtheilige, wie im §. 175.

§. 194.

Erhebt man die zweizifferigte Wurzel 11 zum Kubus

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 11 \\ \hline 121 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$$

so erhält man 1331

Dasselbe wird durch die 2malige Multiplication der der Wurzel 11 gleichen zweitheiligen Wurzel 10 + 1 erhalten.

	1ter Th.		2ter Th.
	10	+	1
	10	+	1
	10 × 10 + 10 × 1	+	10 × 1 + 1 × 1
		× 10 +	1

10X10X10 + 10X10X1 + 10X10X1 + 10X10X1 + 10X1X1 + 10X1X1 + 1X1X1

10X10X10 = 1000
Kubus des 1ten Th.

10X10X1 + 10X10X1 + 10X10X1 = 3X100X1 = 300
Dreifaches Produkt des Quadrats des 1ten Th. in den zweiten.

10X1X1 + 10X1X1 + 10X1X1 = 3X10X1 = 30
Dreifaches Produkt des 1ten Th. ins Quadrat des zweiten.

1X1X1 = 1
Kubus des 2ten Th.

Addition.

K. d. 1ten Th. = 1000

Dreifaches Pr. des Quadrats

des 1ten Th. in d. 2ten = 300

Dreifaches Pr. des 1ten Th.

ins Quadr. des 2ten = 30

K. d. 2ten Th. = = 1

1331

Auf gleiche Weise verfahre man mit der Wurzel $97 = 90 + 7$.

97
97
679
873
9409
97
65863
84681
9126 73

1ter Theil		2ter Theil.
90	+	7
90	+	7

$$90 \times 90 + 90 \times 7 + 90 \times 7 + 7 \times 7$$
$$\times 90 + 7$$

$$\underbrace{90\times90\times90}_{=} + \underbrace{90\times90\times7 + 90\times90\times7 + 90\times90\times7}_{=} + \underbrace{90\times7\times7 + 90\times7\times7 + 90\times7\times7}_{=} + \underbrace{7\times7\times7}_{=}$$

=	=	=	=
729000	3×8100×7	3×90×49	343
Kubus des 1ten Th.	=	=	Kubus des 2ten Th.
	170100	13230	
	Dreifaches Pr. des Quadr. des 1ten Th. in den 2ten.	Dreifaches Pr. des 1ten Th. ins Quadr. des 2ten.	

Addition.

Kubus des 1ten Theils	=	729000
Dreif. Pr. des Quad. des 1ten Th. in d. 2ten	=	170100
Dreif. Pr. des 1ten Th. ins Quadr. des 2ten	=	13230
Kubus des 2ten Theils	=	343
		912673

Hieraus ist klar, daß der Kubus einer jeden zweiziffe-rigten Wurzel, wenn man sie als eine zweitheilige betrachtet, bey welcher der 1te Theil aus den Zehnern, der zweite aus den Einern besteht,

1.) den Kubus des 1ten Theils,

2.) das 3fache Produckt aus dem Quadrat des 1ten Theils in den 2ten,

3.) das 3fache Produckt des 1ten Theils ins Quadrat des 2ten, und

4.) den Kubus des 2ten Theils enthalte; *)

§. 195.

Daß ferner im ganzen Kubus

*) Sinnliche Darstellung dieses Satzes vermittelst eines gehörig durchschnittenen Kubus.

1.) der Kubus des 2ten Theils in der Stelle der Einer allein stehen, sich aber auch bis in die Stelle der Hunderter erstrecken könne.

2.) Daß die niedrigste wirkliche Ziffer des 3fachen Produkts vom 1ten Theil in das Quadrat des 2ten immer in der Stelle der Zehner anzutreffen sey, und daß dieses Produkt sich nicht über die Stelle der Zehner hinaus erstrecken müsse, sich aber bis in die Stelle der Zehntausender, jedoch nicht weiter erstrecken könne.

3.) Daß die niedrigste wirkliche Ziffer des 3fachen Produkts vom Quadrat des 1ten Theils in den 2ten in der Stelle der Hunderter anzutreffen seye, und daß dieses Produkt sich wiederum zwar nicht über die Stelle der Hunderter erstrecken müsse, sich aber bis in die Stelle der Hunderttausender, jedoch nicht weiter erstrecken könne.

4.) Daß endlich die niedrigste wirkliche Ziffer des Kubus des 1ten Theils in der Stelle der Tausender stehe, und die höchste desselben niemals über die Hunderttausender hinausreiche.

§. 196.

Auf den 2 vorhergehenden §. §. beruhen folgende Regeln fürs Ausziehen einer zweizifferigten Kubikwurzel.

1.) Suche, nachdem der Kubus, z. B. 12167, in Klassen getheilt worden,

12|167

aus obigem Täfelchen den größten Kubus einer einfachen Zahl, der sich von der linken Klasse noch abziehen läßt. An die dazu gehörige einzifferige Wurzel hänge eine Null; so hast du den 1ten Theil der Wurzel, welcher hinter die rechte Klasse gesetzt wird.

12|167 || 20 erster Theil der Wurzel.

2.) Den Kubus dieses ersten Theils schreibe unter den ganzen Kubus, und ziehe ihn ab.

Ganzer Kubus	12|167	20 erster Theil der Wurzel.
Kubus d. 1ten Theils	8|000	
Rest	4|167	

3.) Quadrire den 1ten Theil der Wurzel, multiplicire sein Quadrat mit 3 und dividire mit diesem Produkt auf der Seite in den Rest von N°. 2. Der Quotient ist der 2te Theil der Wurzel, welcher unter die 0 des 1ten Theils geschrieben und zu demselben addirt wird, um die ganze Wurzel zu erhalten.

G. Kubus	12	167	20	erster Th. d. W.
K. d. 1ten Th.	8	000	3	zweiter Th. d. W.
Rest	4	167	23	ganze W.

Nebenrechnung.

Rest	4167	1200	dreif. Quadr. d. 1ten Th.
Dreif. Pr. d. Q. d. 1ten Th. in d. zweiten	3600	3	zweiter Theil.
	567		dreif. Pr. des 1ten Th. in's Quadr. d. 2ten + dem Kubus des 2ten Theils.

4.) Um aber zu finden, ob man den 2ten Theil richtig angenommen habe, ist es nöthig, ihn zu quadriren, dieß Quadrat mit dem 1ten Theil zu multipliciren, dieß Produkt 3 mal zu nehmen, und von dem Rest der Division in voriger Nebenrechnung abzuziehen. Bleibt sodann der Kubus des 2ten Theils übrig, so ist in der Annahme dieses 2ten Theils nicht gefehlt worden.

567	dreif. Prod. d. 1ten Th. ins Q. d. zweiten. + dem Kubus des zweiten Theils.
540	dreif. Prod. d. 1ten Th. ins Q. d. zweiten.
27	Kubus des 2ten Theils.

§. 197.

Kürzer steht die Rechnung so:

			erster Th.	zweiter Th.
G. Kubus	12	1 7	2	3
Kubus d. 1ten Th.	8			
Rest	4	167		
Dreif. Q. d. 1ten Th.	(1	2)		
	3	6	dreif. Pr. d. Q. d. 1. Th. in d. 2.	
		54	dreif. Pr. d. 1. Th. ins Q. d. 2.	
		27	Kubus des 2ten Theils.	
	4	167	Summe.	
		0	Rest *)	

§. 198.

Hat der Kubus mehr als 2 Klassen, so hat auch die Wurzel mehr als 2 Ziffern. Das im §. 180 von mehrklassigten Quadraten gesagte gilt auch hier von mehrklassigten Kubikzahlen.

Beyspiel.

			1ter Th.	1ter	2ter	2ter Theil.
91	733	851		4	5	1
64						
27	733					
(4	8)					
24	0					
3	00					
	125					
27	1 5					
	608	851				
(607	5)					
	607	5				
	1	35				
		1				
	608	851				
	0					

*) Mündliche Erläuterung wie im §. 179.

§. 199.

Die Prüfung des Kubikwurzelausziehens geschieht durch Erhebung der gefundenen Wurzel zum Kubus.

§. 200.

Wie es vollkommene und unvollkommene Quadrate gab, so giebt es auch vollkommene und unvollkommene Kubi. Die Wurzeln der letztern sind ebenfalls irrational. Sie werden, gleich den irrationalen Quadratwurzeln, durch Decimalbrüche ausgedruckt, und durch Annäherung gesucht, nur mit dem Unterschied, daß hier immer 3 Nullen angehängt werden müssen, weil die Kubikwurzel aus 1000 = 10 ist.

Beyspiel.

2	1, 25 ꝛc. ꝛc.	
1		
1	000 (3)	
	6	
	12	
	8	
	728	
	272 (43	000 2)
	216	0
	9	00
		125
	225	125
Rest.	46	875

Auch

§. 201.

Auch hier geschieht die Prüfung auf ähnliche Art, wie im §. 184.

§. 202.

Das Zeichen der Kubikwurzeln ist das dasselbe wie das der Quadratwurzeln, nur daß zum Unterschiede von diesen zwischen die Arme des Zeichens ein Dreier geschrieben wird.

$$\sqrt[3]{5}; \quad \sqrt[3]{\frac{(6 \times 9 + 4)}{}}$$

oder $\sqrt[3]{6 \times 9 + 4}$

§. 203.

Gemeine Brüche, aus welchen die $\sqrt[3]{}$ gezogen werden soll, werden entweder in Decimalbrüche verwandelt, oder man zieht die Wurzel aus dem Zähler und Nenner besonders, und erhält dadurch den Zähler und Nenner des Wurzelbruchs. Es ist

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt[3]{\frac{27}{35}} = \frac{3}{3{,}271};$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{64}} = \frac{1{,}709}{4}; \quad \sqrt[3]{\frac{2}{7}} = \frac{1{,}259}{1{,}912}.$$

Wenn bloß aus dem Zähler oder dem Nenner die $\sqrt[3]{}$ gezogen werden soll, so steht das Zeichen auch bloß bey jenem oder diesem. Es ist

$$\frac{\sqrt[3]{10}}{4} = \frac{2{,}154}{4}; \quad \sqrt[3]{\frac{5}{11}} = \frac{5}{2{,}223}.$$

Soll aus dem ganzen Bruch die Kubikwurzel gezogen werden, und sind Zähler sowohl als Nenner unvollkommene Kubi; so multiplicire man beyde entweder mit dem Quadrat des Zählers oder des Nenners, wodurch der eine oder der andere zum vollkommenen Kubus, mithin seine Wurzel rational wird. Es ist

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{27}{45}} = \frac{3}{3{,}556}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{7}} = \sqrt[3]{\frac{98}{343}} = \frac{4{,}610}{7}$$

§. 204.

Ausziehung der Kubikwurzel aus Decimalbrüchen.

Hänge an den Decimalbruch, wenn 3 in der Zahl seiner Decimalstellen nicht aufgeht, nach Befinden, Eine oder 2 Nullen an; ziehe aus ihm die Kubikwurzel, als ob er eine ganze Zahl wäre, und schneide endlich durchs Comma in der Wurzel eben so viele Ziffern von der Rech-

ten gegen die Linke ab, als Decimalstellen vorhanden sind. Durch Anhängung von Nullen ist auch hier eine weitere Annäherung möglich.

Beyspiele.

1) $\sqrt[3]{0,53} = 0,8$

530		8
512		
Rest 18		

2) $\sqrt[3]{3,3} = 1,48$

3	300	148
1		
2	300	
	(3)	
1	2	
	48	
	64	
1	744	
	556	000
	(58	8)
	470	4
	26	88
		512
	497	792
Rest	58	208

*)

*) Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen, deßgleichen der Quadrat- und Cubikwurzeln.

Zweiter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Von den arithmetischen Verhältnissen.

§. 205.

Wenn man bey irgend 2 ungleichen Zahlen ihre Ungleichheit dadurch wahrnimmt, daß man darauf achtet, um wie viel Einheiten die größere mehr als die kleinere, oder die kleinere weniger als die größere enthalte; so

---

Anwendung vom Quadrat- und Cubikwurzelausziehen auf verschiedene, hauptsächlich geometrische Aufgaben, zu welchen der Pythagoräische Lehrsatz und die zwey Sätze von den Verhältnissen ähnlicher Flächen und Körper den Stoff liefern. Diese Sätze dürfen hier als bekannt vorausgesetzt werden, da sie im zweiten Theil, obgleich mit Umgehung des Worts: Verhältniß, vorkommen, und der 2te Theil, nach der in der Vorrede zum 1ten Curs der Zahlenlehre bemerkten Ordnung bereits vorgetragen ist, ehe man zum gegenwärtigen 3ten Curs derselben kommt.

denkt man beyde Zahlen in einem arithmetischen Verhältniß.

§. 206.

Die 2 Zahlen, die dergestalt durch Subtraktion mit einander verglichen werden, heißen die Glieder des arithmetischen Verhältnisses. Diejenige, welche zuerst steht, heißt das vorhergehende, das andere das nachfolgende Glied, und das, was durch die Subtraktion, wenn sie wirklich verrichtet wird, herauskommt, die Differenz des Verhältnisses.

§. 207.

Arithmetische Verhältnisse werden vermittelst des Minuszeichens geschrieben. Z. B.

$2 - 5$ (die Diff. ist 3)
$7\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$ (d. Diff. ist $4\frac{5}{6}$)

§. 208.

Ist das 2te Glied das größere, so hat man ein steigendes, zunehmendes oder wachsendes arithmetisches Verhältniß; umgekehrt aber ein fallendes oder abnehmendes. Vergleiche die 2 Beyspiele des vorigen §. Bey steigenden wird die Differenz durch Subtraktion des 1ten Glieds vom 2ten, bey fallenden durch Subtraktion des 2ten Glieds vom 1ten erhalten. Bey den steigenden ist also das 2te Glied = dem 1ten +

der Differenz, und das 1te = dem 2ten — der Differenz, und umgekehrt bey den fallenden.

§. 209.

Zwei arithmethische Verhältnisse sind gleich, wann beyde steigend oder beyde fallend und ihre Differenzen gleich sind. Es ist

$$2 - 7 = 5 - 10$$
$$7 - \tfrac{1}{3} = 12 - 5\tfrac{1}{3}$$

§. 210.

Wird zu beyden Gliedern eines arithmetischen Verhältnisses Gleiches addirt, oder von beyden Gleiches subtrahirt; so haben im ersten Fall die Summen, im 2ten die Reste dasselbe Verhältniß zu einander.

Beyspiele.

1) 5 — 8 (Differenz 3)
4 4
9 — 12 (Differenz 3)

2) 107 — 97 (Differenz 10)
90 90
17 — 7 (Differenz 10)

Folglich können arithmetische Verhältnisse, deren Glieder sehr groß sind, leicht durch kleinere Zahlen ausgedruckt, auch das kleinere *) beyder Glieder auf o gebracht werden.

Beyspiel.

7 — 10 (Differenz 3)
7 — 7
0 — 3 (Differenz 3)

§. 211.

Werden 2 oder mehrere arithmetische Verhältnisse (die entweder alle steigend oder alle fallend seyn müssen) zu einander addirt; so erhält man in der Summe der vorhergehenden und nachfolgenden Glieder die Glieder eines zusammengesetzten arithmetischen Verhältnisses, dessen Differenz = der Summe der Differenzen der addirten Verhältnisse ist.

Beyspiel:

1	—	3	(Diff. 2)	Summe der Diff. 26.
2	—	7	(Diff. 5)	
5	—	12	(Diff. 7)	
3	—	15	(Diff. 12)	
11	—	37	(Diff. 26)	

*) Diese Beschränkung ist hier nothwendig, weil die Bekanntschaft mit negativen Größen nicht vorausgesetzt wird.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 212.

Zwey gleiche arithmetische Verhältnisse machen zusammen eine arithmetische Proportion aus.

$$5 - 7 = 5 - 9 \text{ *)}$$

§. 213.

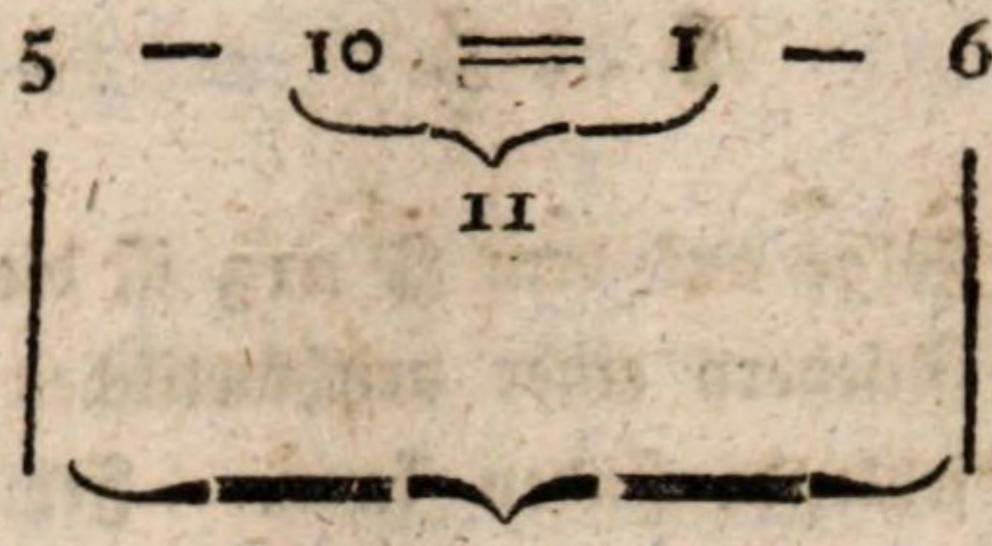
Die 4 Zahlen, die zu einer solchen Proportion erfordert werden, heißen die Glieder der Proportion, und zwar sind das 1te und 4te die äussere, das 2te und 3te die mittlere Glieder.

Von ihnen ist zu bemerken, daß bey jeder arithm. Proportion

die Summe der äussern = der Summe der mittlern Glieder ist, und daß umgekehrt 4 Zahlen eine arithmetische Proportion ausmachen, wenn die Gleichheit dieser Summen statt findet.

---

*) Andere Bezeichnung.



Der Grund hiervon ist: Um was 10 mehr ist als 5, das kommt zur Summe der mittlern Glieder, aber eben soviel, nehmlich um was 6 mehr ist als 1, kommt zur Summe der äussern Glieder. Oder:

$$\frac{5 - 10 = 1 - 6}{5 - 5 + 5 = 1 - 1 + 5}$$

also $5 + 1 + 5 = 5 + 5 + 1.$

§. 214.

Aus dem vorhergehenden § folgt, daß die Proportion bleibt, wenn gleich die gleichnamigten Glieder derselben verwechselt werden.

$$\frac{5 - 10 = 1 - 6 \quad \text{(Diff. 5)}}{5 - 1 = 10 - 6 \quad \text{(Diff. 4)}}$$

$$\frac{6 - 10 = 1 - 5 \quad \text{(Diff. 4)}}{6 - 1 = 10 - 5. \quad \text{(Diff. 5)}}$$

§. 215.

Eine weitere Folge aus dem §. 213 ist die, daß man zu 3 gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion immer das 4te fehlende finden kann. Fehlt eines der äussern, so addirt man die beyden gegebenen mittleren und subtrahirt von der Summe das gegebene äussere, und umgekehrt.

Beyspiele:

1) 2 — 7 = 11 — *

7

18

2

16 = dem 4ten Glied.

2) * — $3\frac{1}{2}$ = 5 — 2

5

$8\frac{1}{2}$

2

$6\frac{1}{2}$ = den 1ten.

3) 5 — * = 6 — 9

5

14

6

8 = dem 2ten.

4) $3 - 5 = * - 20$

$$\frac{3}{23}$$

$$\frac{5}{18} = \text{dem 3ten.}$$

Diese Regel nennt man die arithmethische Regel de Tri (regula de tribus terminis pro inveniendo quarto.) *)

§. 216.

Ist das 2te Glied = dem 3ten, so hat man eine stetige oder zusammenhängende arithmetische Proportion.

$$2 - 4 = 4 - 6$$

Das 4te Glied, 6, heißt hier die 3te, und die Zahl 4 die mittlere arithmetische Proportionalzahl. Dergleichen Proportionen werden auch so bezeichnet: **)

$$\div\ 2 . 4 . 6$$

---

*) Alle Aufgaben, die durch eine Verbindung der Addition mit der Subtraktion aufgelöset werden müssen, und deren im 1ten und 2ten Curs viele vorgekommen sind, gehören hieher.

**) Andere Bezeichnung.

§. 217.

Ist das 1te und mittlere Glied gegeben, so erhält man das 3te, wenn vom doppelten mittlern das 1te abgezogen wird.

∴ 3 . 6 . *)

2 mal

12

3

9 = dem 3ten.

§. 218.

Ist hingegen das 1te und dritte Glied gegeben, so wird das mittlere gefunden, wenn man die 2 gegebenen addirt, und ihre Summe durch 2 dividirt.

∴ 5 . * . 7

5

12

2)

6 = dem mittlern.

§. 219.

Auf gleiche Weise verfährt man in unzähligen Fällen mit mehreren bekannten Zahlen, indem man sie zu

einander addirt, und ihre Summe durch die Anzahl der Posten dividirt. Den Quotienten nennt man das arithmetische Mittel oder den Durchschnitt.

Beyspiel:

In einer gewissen Stadt sind monatlich 6 Fruchtmärkte; was kostet im Durchschnitt das Malter Haber im Monat Januar, wenn es in diesem Monat

am 1ten Markte 3 fl.
— 2ten — $3\frac{1}{2}$
— 3ten — 5
— 4ten — $4\frac{3}{4}$
— 5ten — $3\frac{1}{5}$
— 6ten — 4 kostete?

Antwort $\frac{23\frac{9}{20}\text{ fl.}}{6} = 3\text{ fl. }54\frac{3}{4}\text{ kr.}$

Diese Aufgabe ist von der größten Wichtigkeit bey vielen Finanzberechnungen, bey verschiedenen, von einander abweichenden Beobachtungen ꝛc. ꝛc. Je größer die Anzahl der Posten ist, desto näher liegt das arithmetische Mittel der Wahrheit.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 220.

Eine fortgesetzte stetige arithmetische Proportion, oder eine Reihe von Zahlen, deren Differenzen alle gleich sind, heißt eine arithmetische Progression, oder eine arithmetische Reihe. *)

0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . . . . .
7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . . . . .

§. 221.

Ist jedes folgende Glied größer als das vorhergehende, so ist die Reihe zunehmend oder wachsend. Werden hingegen die Glieder immer kleiner, so heißt die Reihe abnehmend oder fallend. Das, was in der Folge von den zunehmenden gelehrt werden wird, gilt auch von den fallenden, sobald man diese umkehrt.

§. 222.

Ist das 1te Glied einer zunehmenden Reihe und die Differenz derselben gegeben, so wird das wievielste Glied, als man immer will, gefunden, wenn man die Diffe-

---

*) Bloß die arithmetischen Reihen des ersten Ranges werden hier abgehandelt.

renz mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder multiplicirt, und dieß Produkt zum 1ten Gliede addirt. Soll also das letzte gefunden werden, so muß die Differenz mit der Anzahl aller Glieder weniger 1 multiplicirt werden. Der Grund dieser Regel liegt in der §. 220 gegebenen Definition.

Es ist

l. Gl. = 1ten Gl. + (Zahl d. Gl. — 1) × Differenz.

Beyspiele.

Es seye die Reihe:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.
	=	=	=	=	=	=	=
	2+3	2+2.3	2+3.3	2+4.3	2+5.3	2+6.3	2+7.3

Gegeben

das 1te Glied = 2

die Differenz = 3

Zu finden

das 7te Glied.

Differenz = 3

Anzahl der vorhergehenden Glieder = 6

18

2 = dem ersten Glied.

20 = dem 7ten Glied.

Es seye die Reihe abermals

I. II. III. IV CIX

2. 5. 8. 11 . . . . . .

Gegeben	Zu finden
das 1te Glied = 2	das letzte Glied.
die Differenz = 3	
die Zahl der Gl. = 109	

Differenz = 3

Anzahl aller Glieder weniger 1 = 108

324

Erstes Glied = 2

Letztes oder 109tes Glied = 326

§. 223.

Bedenkt man, daß Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches mit Gleichem multiplicirt und Gleiches durch Gleiches dividirt, gleiche Summen, Reste, Produkte und Quotienten geben muß: so kann man aus der Regel des vorigen §. mit leichter Mühe die Regeln für das 1te Glied, für die Differenz und für die Zahl der Glieder finden. Es ist das

1te Gl. = letzten Gl. — (Zahl d. Gl. — 1) × Differenz.

Es sey die Reihe

I. II. III. IV. V. VI.

3. $7\frac{1}{2}$. 12. $16\frac{1}{2}$. 21. $25\frac{1}{2}$.

Gegeben

Gegeben			zu finden
das letzte Glied	=	$25\frac{1}{2}$	das 1te Glied
die Zahl der Gl.	=	6	
die Differ.	=	4	

Diff. = $4\frac{1}{2}$

Zahl der Gl. — 1 = 5

$22\frac{1}{2}$

letztes Gl. = $25\frac{1}{2}$

$22\frac{1}{2}$

3 = dem 1ten Gl.

§. 224.

Aus dem 1ten und letzten Glied und der Zahl der Glieder wird die Differenz gefunden, wenn man den Unterschied zwischen dem letzten und 1ten Glied durch die Zahl der Glieder weniger 1 dividirt. Es ist

$$\text{die Differenz} = \frac{\text{l. Gl.} - \text{1ten Gl.}}{\text{Zahl d. Gl.} - 1}$$

Es sey die Reihe

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
0.	$\frac{1}{2}$.	1.	$1\frac{1}{2}$.	2.	$2\frac{1}{2}$.	3.

Gegeben		zu finden
1tes Gl.	= 0	die Differenz.
l. Gl.	= 3	
Z. d. Gl.	= 7	
letztes Gl.	= 3	
1tes Gl.	= 0	

Z. d. Gl. weniger 1 $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} =$ der Diff.

§. 225.

Endlich kann aus dem 1ten und letzten Glied und der Differenz auch die Zahl der Glieder gefunden werden. Es ist

$$\text{die Z. d. Gl.} = \frac{\text{l. Gl.} - \text{1ten Gl.}}{\text{Differenz}} + 1.$$

Es seye die Reihe

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII VIIII.
6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22.

Gegeben		zu finden.
1tes Gl.	= 6	die Zahl d. Gl.
l. Gl.	= 22	
Diff.	= 2	
letztes Gl.	= 22	
1tes Gl.	— 6	
	16	
Differenz = 2)	8	
	1	
	9 = d. Z. d. Gl.	

§. 226.

Wenn das erste Glied, die Differenz und die Zahl der Glieder gegeben sind, so läßt sich die ganze Progression hinschreiben, folgl. auch die Summe aller Glieder durch gewöhnliche Addition derselben finden. Weil aber dieses bey einer großen Anzahl der Glieder sehr beschwerlich wäre; so bedient man sich einer kurzen Regel, deren Richtigkeit aus folgender Darstellung erhellen wird.

Die Prozession habe 7 Glieder, und sey

2. 6. 10. 14. 18. 22. 26, so ist

d.Sum. $= 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26$

oder $= 26 + 22 + 18 + 14 + 10 + 6 + 2$ und

---

d.dopp.Sum. $= 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28$

oder $= 28 \times 7$ Folgl. auch

---

die einfache Sum. $= \frac{28 \times 7}{2} = 28 \times \frac{7}{2} = \frac{28}{2} \times 7.$

Die Summe wird daher gefunden wenn man die Summe des 1ten und letzten Glieds mit der Zahl der Glieder multiplicirt, und ins Produkt mit 2 dividirt, oder die Summe des 1ten und letzten Glieds mit der halben Zahl der Glieder, oder endlich die Hälfte jener Summe mit der ganzen Zahl der Glieder multiplicirt.

Es ist die Sum. $= \frac{(\text{1ten} + \text{lezt. Gl.})\ \text{Z. d Gl.}}{2} = \frac{\text{1ten} + \text{l. Gl.}}{2} \times \text{Z. d. Gl.} = \text{1ten} + \text{l. Gl.} \times \frac{\text{Z. d. Gl.}}{2}$

Ist das letzte Glied nicht, sondern statt seiner die Difrenz gegeben, so muß es zuvor nach §. 222 gefunden werden.

Beyspiele.

1.) Wie groß ist die Summe der gewöhnlichen Zahlen von 1 — 100000?

Antw. 5000050000.

Summe d. 1ten und l. Gl. = 100001
Halbe Zahl der Gl. = 50000

Summe aller Gl. = 5000050000.

2.) Das 1te Glied ist $3\frac{1}{2}$, die Differenz $\frac{2}{5}$, die Zahl der Glieder 8; wie groß ist die Summe?

Antwort: 39,2.

§. 227.

Aus der Regel des vorhergehenden §. (die Summe $= \frac{(\text{l. Gl.} + \text{dem 1ten Gl.}) \times \text{Z.d. Gl.}}{2}$) können auf dieselbe Art, wie in den §§. 223,224 und 225, 4 andere

Regeln für das letzte, für das 1te Glied, für die Zahl der Glieder und für die Differenz der Reihe gefunden werden.

Es ist

$$\text{I. Gl.} = \frac{2 \times \text{die Summe}}{\text{Z. der Gl.}} - \text{1ten Gl.}$$

Es seye die Reihe

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.

Gegeben		Zu finden
die Summe	= 80	d. I. Gl.
1te Gl.	= 3	
Zahl d. Gl.	= 8	

Summe = 80

2 mal

Z. d. Gl. = 8) $\frac{160}{20}$

1tes Gl. = $\frac{3}{17}$ = dem I. Gl.

§. 228.

$$\text{1tes Gl.} = \frac{2 \times \text{Summe}}{\text{Z. d. Gl.}} - \text{I. Gl.}$$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
11.	13.	15.	17.	19.	21.

Gegeben	Zu finden
Summe = 96	das 1te Gl.
1. Gl. = 21	
3. d. Gl. = 6	

Summe = 96

2 mal

3. d. Gl. = 6) $\frac{192}{32}$

1. Gl. = 21

11 = dem 1ten Gl.

§. 229.

$$\text{3. d. Gl.} = \frac{2 \times \text{Summe}}{\text{1. Gl.} + \text{dem 1ten Gl.}}$$

I.	II.	III.	IV.	V.
3.	8.	13.	18.	23.

Gegeben	Zu finden
Summe = 65	die Zahl d Gl.
1tes Gl. = 3	
1. Gl. = 23	

Summe = 65

2 mal

1. Gl. + 1tes Gl. = 26) $\frac{130}{5}$ = der 3. d. Gl.

§. 230.

$$\text{Diff.} = \frac{2 \times \text{Summe} - 2 \times \text{ites Gl.} \times \text{Z. d. Gl.}}{\text{Z. der Gl.} \times \text{Z. der Gl.} - \text{Z. der Gl.}}$$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.

Gegeben — zu finden die Differenz.

Summe = 100
Z. d. Gl. = 8
ites Gl. = 2

1.) Z. d. Gl. = 8
ites Gl. = 2

16
2 mal

32

2.) Summe = 100

200
32 (N°. 1.)

168

3.) Zahl d. Gl. = 8
Zahl d. Gl. = 8

64
Zahl d. Gl. 8

56

4.) $\frac{168 \text{ (N°. 2.)}}{56 \text{ (N°. 3.)}} = 3 =$ d. Diff.

*)

Von den geometrischen Verhältnißen.

§. 231.

Wenn man bei irgend zwei ungleichen Zahlen ihre Ungleichheit dadurch wahrnimmt, daß man darauf achtet, um wie vielmal die eine größer ist als die andere, das heißt, wie oft die eine in der andern enthalten seye; so denkt man beide Zahlen in einem geometrischen Verhältniß.

§. 232.

Die zwei Zahlen, die der Gestalt durch Division mit einander verglichen werden, heißen die Glieder des geometrischen Verhältnisses. Diejenige, welche zuerst steht, heißt das vorhergehende, das andere das nachfolgende Glied, und das, was durch die Division, wenn sie wirklich verrichtet wird, heraus kommt, der Exponent des Verhältnißes.

---

*) Die bisherigen Regeln können auf verschiedene arithmetische Progressionlaufgaben, als z. B. auf die Abtragung eines Thurms, auf das Graben eines Brunnens, auf den Fall der Körper ꝛc. angewendet werden.

§. 233.

Geometrische Verhältnisse werden vermittelst des Divisionszeichen geschrieben. Z. B.

3 : 6 (der Exponent ist 2)

18 : 12 (der Exponent ist $1\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{2}{3}$)

§. 234.

Ist das zweite Glied das größere, so hat man wiederum ein steigendes, zunehmendes oder wachsendes geometrisches Verhältniß; umgekehrt aber ein fallendes oder abnehmendes. Vergleiche die zwei Beispiele des vorigen §.

Bei steigenden wird der Exponent durch Division des ersten Glieds ins zweite, bei fallenden durch Division des zweiten ins erste erhalten. Jedoch kann man auch bei fallenden mit dem ersten ins zweite Glied dividiren, wodurch dann der Exponent immer ein eigentlicher Bruch werden muß. Bei den steigenden ist also das zweite Glied = dem ersten multiplicirt in den Exponenten, nnd das erste = dem zweiten dividirt durch den Exponenten, und umgekehrt bey den fallenden; Es wäre denn, daß man den Exponenten nach der angeführten zweiten Art fände, in welchem Fall die abnehmenden Verhältnisse mit den steigenden übereinkommen.

§. 235.

Zwei geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn beide steigend oder beide fallend, und ihre Exponenten gleich sind. Es ist;

$$4 : 12 = 3 : 9$$
$$7 : 2 = 6 : 1\tfrac{1}{7}.$$

§. 236.

Werden beide Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit einerlei Zahlen multiplizirt oder dividirt, so haben im ersten Fall die Produkte, im zweiten die Quotienten dasselbe Verhältniß zu einander.

Beyspiele.

1.) $\begin{array}{rcl} 6 & : & 30 \\ 9 & & 9 \\ \hline 54 & : & 270 \end{array}$ (Exponent 5)

2.) $\begin{array}{rcl} 20) & 100 & : 20 \\ \hline & 5 & : 1 \end{array}$ (Exponent 5 oder $\frac{1}{5}$)

Es können mithin auch geometrische Verhältnisse, deren Glieder sehr groß sind, durch kleinere Zahlen ausgedruckt, und ein jedes von beiden Gliedern, welches man will, auf 1 gebracht werden. Sind die Glieder ganze Zahlen, so müssen sie, wenn das verkleinerte Verhältniß

ebenfalls aus ganzen Zahlen bestehen soll, einen gemeinschaftlichen Divisor haben (2ter Kurs §. 120) Verhältnisse, bei welchen das eine oder das andere Glied oder beide gebrochene Zahlen sind, können in andere verwandelt werden, deren Glieder aus ganzen Zahlen bestehen; jedoch werden in diesem Fall die Zahlen jedesmal grösser.

Beyspiele.

1.) $3\ 1/4 : 8$

$13/4 : 8$

$13 : 32$

2.) $20 : 18\ 1/2$

$20 : 37/2$

$40 : 37$

3.)

$6\ 1/5 : 10\ 2/3$

$31/5 : 32/3$

$31 : \frac{160}{3}$

$93 : 160$

§. 237.

Werden zwei oder mehrere geometrische Verhältnisse (die entweder alle steigend oder alle fallend seyn müssen) in einander multiplizirt; so erhält man in dem Produkt der vorhergehenden und nachfolgenden Glieder die Glieder eines zusammengesetzten geometrischen Verhältnisses, dessen Exponent = dem Produkt aller Exponenten der multiplizirten Verhältnisse ist.

Beyspiel.

6	:	12	(Exponent	2)	Produkt der Exponenten 360.
3	:	24	(—	8)	
7	:	35	(—	5)	
12	:	144	(—	12)	

1512 : 1451520 (Exponent 960)

Von den geometrischen Proportionen.

§. 238.

Zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion.

5 : 15 = 7 : 21 *

§. 239.

Die vier Zahlen, die zu einer solchen Proportion erfordert werden, heißen auch hier die Glieder der Proportion, und zwar sind gleichfalls das erste und vierte die äußern, das zweite und dritte die mittlern Glieder.

Bei einer jeden geometrischen Proportion ist das Produkt der äussern = dem Produkt der mittlern Glieder, und umgekehrt machen vier Zahlen eine geo-

*) Andere Bezeichnung.

metrische Proportion aus, wenn die Gleichheit dieser Produkte statt findet.

$$3 : \underbrace{21 = 6}_{126} : 42$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{126}$$

Der Grund hievon ist: um wie vielmal 21 größer ist als 3, um eben so vielmal wird das Produkt der mittlern Glieder grösser; hiegegen wird auch das Produkt der beiden äussern, um eben so vielmal grösser, nemlich um so viel mal 42 grösser als 6 ist. Oder

$$3 : 21 = 6 : 42$$
$$3 : 3.7 = 6 : 6.7$$

also $3 . 6.7 = 3 . 7.6$

§. 240.

Nach dem vorhergehenden § findet man die möglichen Veränderungen einer geometrischen Proportion, wenn man sie immer so abändert, daß das Produkt der äussern und mittlern Glieder gleich bleibt. Diese Veränderungen geschehen

1.) durch Verwechslung der mittlern Glieder

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{6 : 3 = 36 : 18}$$

2.) durch Umkehrung

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{36 : 6 = 18 : 3}$$

$$\frac{3 : 6 = 18 : 36}{18 : 3 = 36 : 6}$$

3.) durch Zusammensetzung

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{6 + 36 : 36 = 3 + 18 : 18}$$

$$\frac{}{6 + 36 : 6 = 3 + 18 : 3}$$

4.) durch Sonderung.

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{36 - 6 : 36 = 18 - 3 : 18}$$

$$\frac{}{36 - 6 : 6 = 18 - 3 : 3}$$

5.) durch Multiplikation eines äussern und mittlern Glieds mit einerlei Zahl

6 : 36 = 3 : 18
4 4

24 : 144 = 3 : 18
6 : 36 = 3 : 18
3 3

18 : 36 = 9 : 18
6 : 36 = 3 : 18
5 5

6 : 36 = 15 : 90
6 : 36 = 3 : 18
7 7

6 : 252 = 3 : 126

6.) Durch Division eines äussern und mittlern Glieds mit einerlei Zahl.

:6) 6 : 36 = 3 : 18 / 1 : 6 = 3 : 18

:3) 6 : 36 = 3 : 18 / 2 : 36 = 1 : 18

:3) 6 : 36 = 3 : 18 / 6 : 36 = 1 : 6

:18) 6 : 36 = 3 : 18 / 6 : 2 = 3 : 1

7.) Durchs Quadriren oder Kubiren aller 4 Glieder.

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{36 : 1296 = 9 : 324}$$

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{216 : 46656 = 27 : 5832}$$

8.) Durchs Quadrat = und Kubikwurzel = Ausziehen aus allen 4 Gliedern.

$$\sqrt{)}\ \frac{4 : 16 = 9 : 36}{2 : 4 = 3 : 6}$$

$$\sqrt[3]{)}\ \frac{27 : 1728 = 216 : 13824}{3 : 12 = 6 : 24}$$

9.) Durch Multiplication zweier oder mehrerer Proportionen in einander.

$$\frac{6 : 36 = 3 : 18}{2 : 4 = 3 : 6}$$

$$12 : 144 = 9 : 108$$

$$\frac{4 : 16 = 9 : 36}{6 : 3 = 12 : 6}$$
$$3 : 9 = 6 : 18$$

$$72 : 432 = 648 : 3888$$

Hierbei sind folgende vier besondere Fälle zu bemerken.

a.)

a.) Wenn zwei Proportionen in einander multiplizirt werden sollen, und ein äusseres und ein inneres Glied der einen, einem äussern und einem innern Glied der andern gleich ist; so kann man die neue Proportion sogleich geschmeidiger erhalten, wenn man die übrigen Glieder ordentlich genommen in Proportion setzt.

3 : 6 = 8 : 16
8 : 16 = 5 : 10

---

3 : 6 = 5 : 10

7 : 21 = 5 : 15
21 : 42 = 15 : 30

---

7 : 42 = 5 : 30

5 : 30 = 6 : 36
14 : 6 = 84 : 36

---

5 : 14 = 30 : 84

b.) Eine ähnliche Abkürzung findet statt, wenn in den zu multiplizirenden Proportionen entweder die beiden äussern Glieder der einen den beiden äussern Gliedern der andern, oder die beiden innern Glieder der einen den beiden innern Gliedern der andern, oder eudlich auch die beiden äussern Glieder der einen den beiden innern Gliedern der andern gleich sind. In allen drei Fällen werden die noch übrigen

Glieder verkehrt genommen in Proportion gesetzt

8 : 16 = 3 : 6
8 : 4 = 12 : 6

16 : 4 = 12 : 3

6 : 36 = 3 : 18
4 : 36 = 3 : 27

4 : 6 = 18 : 27

6 : 2 = 12 : 4
3 : 6 = 4 : 8

3 : 2 = 12 : 8

e.) wenn zwei Proportionen in einander multiplizirt werden sollen, bei welchen das vierte Glied der ersten = dem dritten Glied der zweiten; so verhält sich das Produkt der ersten zum Produkt der zweiten Glieder, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Glied der zweiten.

3 : 6 = 18 : 36
3 : 15 = 36 : 180

9 : 90 = 18 : 180

d.) sollen endlich mehrere Proportionen in einander multiplizirt werden, bei welchen allen

das letzte Glied jeder vorhergehenden = dem dritten Glied der folgenden ist; so verhält sich das Produkt aller ersten Glieder zum Produkt aller zweiten wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Glied der letzten.

$$\begin{array}{rrcrr} 3 & : & 6 & = & 18 : 36 \\ 3 & : & 15 & = & 36 : 180 \\ 2 & : & 4 & = & 180 : 360 \\ 3 & : & 6 & = & 360 : 720 \\ \hline 54 & : & 2160 & = & 18 : 720 \end{array}$$

Hieraus ergeben sich einige wichtige Folgerungen.

1.) Jedes beliebige Glied einer geometrischen Proportion kann nach N° 1 und 2 in jede beliebige Stelle gebracht werden.

2.) Die in einer Proportion vorkommenden Brüche lassen sich nach N°. 5 beseitigen, wodurch die Proportion in ganzen Zahlen dargestellt wird.

$$\times 3) \quad \frac{\frac{2}{3} : 6 = 3 : 27}{2 : 18 = 3 : 27}$$

$$\text{oder} \quad 2 : 6 = 9 : 27$$

$$\times 5) \quad \frac{5 : \frac{1}{5} = 7 : \frac{7}{25}}{25 : 1 = 7 : \frac{7}{25}}$$

$$\times 25) \quad 25 : 1 = 175 : 7$$

$$\begin{array}{rl} \times\ 3) & \frac{2}{3} : 6 = \frac{1}{6} : 1\frac{1}{2} \\ \times\ 6) & 2 : 18 = \frac{1}{6} : 1\frac{1}{2} \\ \times\ 2) & 12 : 18 = 1 : 1\frac{1}{2} \\ & 12 : 18 = 2 : 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \times\ 2) & \frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{3}{15} : \frac{1}{20} \\ \times\ 8) & 1 : \frac{2}{8} = \frac{3}{15} : \frac{1}{20} \\ \times\ 15) & 8 : 2 = \frac{3}{15} : \frac{1}{20} \\ \times\ 20) & 8 : 2 = 3 : \frac{15}{20} \\ & 8 : 2 = 60 : 15 \end{array}$$

*)

3.) Proportionen, deren Glieder grössere Zahlen sind, lassen sich, wenn ein äusseres und mittleres Glied derselben einen gemeinschaftlichen Divisor hat, nach N°. 6, durch kleinere Zahlen, ausdrucken. Auch kann man nicht selten durch Verbindung mit N°. 5 einen Bruch dadurch mit Vortheil beseitigen.

$$\begin{array}{rl} :\ 6) & 6 : 36 = 12 : 72 \\ :\ 12) & 1 : 6 = 12 : 72 \\ :\ 6) & 1 : 6 = 1 : 6 \\ & 1 : 1 = 1 : 1 \end{array}$$

---

*) Weitere Auseinandersetzung aller hieher gehörigen Fälle.

$$3 : \tfrac{1}{2} = 24 : 4$$

$$3 : 1 = 12 : 4$$

4.) Endlich lassen sich, nach N°. 7, die in einer Proportion vorkommenden Wurzelzeichen wegschaffen.

$$2 : \sqrt{16} = \sqrt{36} : 12$$

$$4 : 16 = 36 : 144$$

$$4 : 48 = \sqrt[3]{27} : 36$$

$$64 : 110592 = 27 : 46656$$

§. 241.

Aus dem §. 239. erhelt ferner, daß man zu je 3 gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion immer das 4te fehlende finden kann. Fehlt eines der äussern, so multiplicirt man die beyden gegebenen mittlern, und dividirt ins Produkt mit dem gegebenen äussern, und umgekehrt.

Beyspiele:

1.) $3 : 12 = 6 : \frac{12 \cdot 6}{3}$

3) $\frac{72}{24} =$ dem 4ten Glied.

2.) * : 8 = 2 : 4
2

4.) 16/4 = dem 1ten.

3) 5 : * = 2 : 10
10

2.) 50/25 = dem 2ten.

4.) 7 : 21 = * : 18
7

21) 126/6 = dem 3ten.

Diese Regel nennt man die geometrische Regel de Tri, oder auch, weil die arithmetische (§. 215.) unter diesem Namen selten vorkommt, überhaupt die Regel de Tri. *)

§. 242.

Ist in einer geometrischen Proportion das 2te Glied = dem 3ten, so heißt sie stetig oder zusammenhängend.

---

*) Hieher gehören alle Anfgaben, die durch eine Verbindung der Multiplication mit der Division aufgelöst werden müßen, dergleichen schon im 1ten und 2ten Curs viele vorgekommen sind.

$$2 : 6 = 6 : 18$$

Auch hier wird das 4te Glied, 18, die 3te und die Zahl 6 die mittlere geometrische Proportionalzahl genannt.

Das Zeichen einer solchen Proportion ist *)

$$\div 5 . 10 . 20.$$

§. 243.

Aus dem 1ten und mittlern Glied erhält man das 3te, wenn ins Quadrat des mittlern mit dem 1ten dividirt wird.

$$\div 6 . 8 . *$$

$$\frac{8}{6)\ 64}$$

$10\frac{2}{3}$ = dem 3ten.

§. 244.

Soll hingegen aus dem 1ten und 3ten das mittlere gefunden werden, so wird aus dem Product beyder gegebenen Glieder die $\sqrt{}$ gezogen.

---

*) Andere Bezeichnung.

÷ 7 : * 28

7

1 | 96 || 14 = dem mittlern.
1 |

96
24

96
---

§. 245.

Sollen aus einem gegebenen äussern und einem gegebenen mittlern Glied, nebst der Summe der beyden übrigen die 2 fehlenden Glieder einer gewöhnlichen geometrischen Proportion gefunden werden; so verfahre men nach §. 240. N°. 3. Es seye die Summe der fehlenden, des 2ten und 4ten Glieds = 26, das 1te = 6 und das 3te = 7; so ist

$$\frac{6 : * = 7 : \dagger}{6 : 7 = * : \dagger} \text{ (§. 240 N°. 1)}$$

$$\frac{6 + 7 : 7 = * + \dagger : \dagger}{13 : 7 = 26 : \dagger}$$

$$\frac{7}{}$$

folglich $\frac{182}{13} = 14 = \dagger$

Ferner $\frac{6 + 7 : 6 = * + \dagger : *}{13 : 6 = 26 : *}$

$$\frac{6}{}$$

folglich $\frac{156}{13} = 12 = *$

§. 246.

Eben so können aus einem gegebenen äussern und einem gegebenen mittlern Glied, nebst der Differenz der beyden übrigen nach §. 240. N°. 4, die 2 fehlenden gefunden werden.

Es seye die Differenz = 15, das 1te Glied = 9, das 3te = 4; so ist

$$\frac{9 : * = 4 : \dagger}{9 : 4 = * : \dagger}$$

$$\frac{9 - 4 : 4 = * - \dagger : \dagger}{5 : 4 = 15 : \dagger}$$

$$\frac{}{4}$$

folglich $\frac{60}{5} = 12 = \dagger$

Ferner

$$\frac{9 - 4 : 9 = * - \dagger : *}{5 : 9 = 15 : *}$$

$$\frac{}{9}$$

folgl. $\frac{135}{5} = 27 = *$.

§. 247.

Werden bey mehrern gleichen Verhältnissen alle ersten und alle zweiten Glieder summirt; so ist das Verhältnis der Summen = jedem einzelnen addirten Verhältnis.

3 : 15
5 : 25
7 : 35
8 : 40

23 : 115 ═══ { 3 : 15 / 5 : 25 / 7 : 35 / 8 : 40.

Von der Regel de Tri insbesondere.

§. 248.

Wenn in einer Rechnungsfrage 3 Zahlen gegeben werden, von denen eine den übrigen unähnl., die 2 übrigen aber einander ähnlich sind, und sich die eine derselben zur andern, wie die unähnliche zu der zu findenden 4ten verhält, so gehört die Aufgabe in die Regel de Tri.

§. 249.

1) Wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen gerade wie ihre Ursachen. Man muß sagen: Je größer oder kleiner die Ursache, desto größer oder kleiner die Wirkung. Es ist, wenn

Z ═══ z,

U : u ═══ W : w.

2) Wenn die Ursachen gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen gerade wie die Zeiten, in denen sie vollbracht werden. Man muß auch hier sprechen: Je größer oder kleiner die Zeit, desto größer oder kleiner die Wirkung. Es ist, für U = u,

$$Z : z = W : w.$$

3) Sind aber die Wirkungen gleich, so verhalten sich die Ursachen verkehrt wie die Zeiten, in denen sie wirksam sind. Man muß sagen: Je größer oder kleiner die Ursache, desto kleiner oder größer die Zeit. Es ist, für W = w,

$$Z : z = u : U.$$

Ist nun eine Aufgabe so beschaffen, daß die 3 gegebenen Zahlen mit der unbekannten 4ten eine Proportion wie die in No. 1 oder 2 ausmachen, so gehört sie in gerade Regel de Tri. Man erkennt dieß an den Worten: Je mehr, desto mehr; je größer, desto größer; je kleiner, desto kleiner ꝛc. ꝛc.

Bilden hingegen die 3 gegebenen Zahlen mit der unbekannten 4ten eine Proportion wie die in No. 3; so gehört sie in No. 3; so gehört ste in die verkehrte Regel de Tri. Dieß ist jedesmal der Fall, wenn man sagen muß: Je größer, desto kleiner; je weniger, desto mehr ꝛc. ꝛc.

A) Wie Ursachen und Wirkungen bey gleichen Zeiten verhalten sich Z. B.

a) Waaren und Preiße. Es können gegeben seyn entweder 2 Waaren und 1 Preis oder 2 Preise und 1 Waare.

b) Angelegte Capitalien und Zinse. Gegeben 2 Capitalien und 1 Zins, oder 2 Zinse und 1 Capital.

c) Geschwindigkeiten und Wege. Gegeben 2 Geschwindigkeiten und 1 Weg, oder 1 Geschwindigkeit und 2 Wege.

d) Verschiedene Geldsorten, Maaße oder Gewichte, wenn in der Aufgabe bestimmt ist, wie viel Einheiten der einen Geldsorte, des einen Maaßes oder Gewichts erfordert werden, um eine gewisse Anzahl der andern Geldsorte ꝛc. ꝛc. zu haben.

e) Flächen und Breiten derselben bey gleichen Längen, oder Flächen und Längen derselben bey gleichen Breiten. Gegeben 2 Flächen und 1 Breite oder Länge, oder 1 Fläche und 2 Breiten oder Längen.

f) Arbeiter und Arbeiten. Gegeben 2 Zahlen von Arbeitern und 1 Arbeit, oder umgekehrt. ꝛc. ꝛc.

B) Wie Zeiten und Wirkungen bey gleichen Ursachen verhalten sich z. B.

a) Zeiten und Zinse bey gleichen Capitalien. Gegeben 2 Zinse und 1 Zeit, oder 2 Zeiten und 1 Zins.

b) Zeiten und Wege bey gleichen Geschwindigkeiten. Gegeben 2 Zeiten und 1 Weg, oder 2 Wege und 1 Zeit.

c) Zeiten und Arbeiten bey gleich vielen Arbeitern. Gegeben 2 Zeiten und 1 Arbeit, oder umgekehrt. ꝛc. ꝛc.

C) Wie Zeiten und Ursachen endlich bey gleichen Wirkungen verhalten sich z. B.

a) Zeiten und Capitalien bey gleichen Zinsen. Gegeben 2 Capitalien und 1 Zeit, oder 1 Capital und 2 Zeiten.

b) Zeiten und Geschwindigkeiten bey gleichen Wegen. Gegeben 2 Zeiten und 1 Geschwindigkeit, oder 2 Geschwindigkeiten und 1 Zeit.

c) Verschiedene Geldsorten, Maaße oder Gewichte, wenn in der Aufgabe ihre Einheiten durch Theile der einen oder andern oder auch einer 3ten Einheit ausgedruckt sind.

d) Breiten und Längen bey gleichen Flächen. Gegeben 2 Breiten und 1 Länge, oder 2 Längen und 1 Breite.

e) Zeiten und Arbeiter bey gleichen Arbeiten. Gegeben 2 Zeiten und Eine Anzahl Arbeiter, oder umgekehrt. ꝛc. ꝛc.

§. 250.

Eine Aufgabe der Regel de Tri ansetzen, heißt: die 3 gegebenen Zahlen derselben so ordnen, daß die unbekannte in der Proportion die 4te oder letzte Stelle erhält. Daß dieß möglich sey, erhellt aus Folgerung 1 des §. 240. Diese Absicht wird erreicht, wenn man

1) Entweder

a) der unähnlichen Zahl die 3te Stelle giebt,

b) untersucht, ob die Aufgabe in die gerade oder verkehrte Regel de Tri gehöre,

c) und endlich diejenige der beyden ähnlichen Zahlen, welche auf die andere dieselbe Beziehung hat, in der die unbekannte zur gegebenen unähnlichen steht (die Fragzahl) im erstern Falle nachfolgen, im andern vorangehen läßt.

2) Oder, wenn man

a) die unähnliche Zahl in die 2te oder mittlere Stelle setzt,

b) untersucht, ob mehr oder weniger als sie herauskommen muß,

c) und im erstern Falle der kleinern, im 2ten der größeren der beyden ähnlichen die 1te Stelle ertheilt.

§. 251.

Sollen verschiedene Geldsorten, Gewichte und Maaße in einander verwandelt werden; so setzt dies die Bekanntschaft mit den hiezu nöthigen Verhältnißzahlen voraus. Diese können von zweyerley Art seyn, §. 249. Lit. A. d und C. c. Jene geben immer eine gerade, diese eine verkehrte Regel de Tri. Sie sind entweder in einer Aufgabe unmittelbar gegeben, oder nicht, in welchem Falle sie in den diesen Gegenstand behandelnden Schriften nachgeschlagen werden müssen. Ausser den, im § 17 des ersten Curses angeführten, verdient hiernoch vorzüglich bemerkt zu werden: Ueber allgemeines Maaß und Gewicht, von M. Fr. Wild, Freyburg 1809.

Für uns durfte zu Uebungsaufgaben einstweilen folgendes Verzeichniß der Verhältnißzahlen von einigen in

unsern Gegenden am häufigsten vorkommenden Geldsorten, Gewichten und Maaßen hinreichend seyn. *)

A.

Geldsorten.

1) 3 Reichsgulden = 2 Reichsthaler.
20 fl. = 10 Conv. Thlr. (nach dem 20 fl. Fuß),
oder 2 fl. = 1 Conv. Thlr.
24 fl. = 10 Conv. Thlr. (nach dem 24 fl. Fuß)
oder 12 fl. = 5 Conv. Thlr.
11 fl. = 4 Löthlr. = 1 neuen Louisd'or.
27 fl. = 10 Kronenthlr.
11 fl. = 24 Franken.
23 fl. = 10 Napoleonthlr.
28 fl. = 3 Napoleond'ors.

*) Man vergleiche die Anmerkung zu §. 18 des 1ten Cursus. Wie dort bleiben auch hier die eigentlichen geometrischen Maaße weg.

Was die im Großherzogthum Baden bestehende Maaße und Gewichte betrifft; so führe ich einmal die im Malerischen Rechenbuch angegebenen Verhältnißzahlen an, weil sie, wie bisher, noch immer bey den Verrechnungen als öffentlich gültig zu Grunde gelegt werden, sodann aber auch die vom Herrn Hofr. Wild neuerlich gesuchten Zahlen. In jedem Fall wird, wenn auch die trefflichen Vorschläge desselben mit nächstem zur Ausführung kommen sollten, dennoch die Kenntniß der ehemals üblichen Gewichte und Maaße noch eine geraume Zeit unentbehrlich seyn.

4 R. Thlr. = 3 Conv. Thlr. (nach dem 20 fl. Fuß)
8 — — = 5 Conv. Thlr. (nach dem 24 fl. Fuß)
11 — — = 4 Lbthlr.
9 — — = 5 Kronenthlr.
11 — — = 36 Franken.
23 — — = 15 Napoleonthlr.
56 — — = 9 Napoleond'ors.

---

6 C.Rthlr.(20 Fuß) = 5 C.Thlr. (24 fl. Fuß)
11 — — = 8 Lbthlr.
27 — — = 20 Kr. Thlr.
11 — — = 48 Franken.
23 — — = 20 Napoleonthlr.
14 — — = 3 Napoleond'ors.

---

55 C.Thlr. (24 fl. Fuß) = 48 Lbthlr.
9 — — = 8 Kr. Thlr.
55 — — = 288 Franken.
23 — — = 24 N. Thlr.
35 — — = 9 Napoleonsd'or.

---

54 Laubthlr. = 55 Kr. Thlr.
1 — = 6 Franken.
46 — = 55 Napoleonthlr.
112 — = 33 Napoleondlors.

55	Kr. Thlr.	=	324 Franken.
23	— — —	=	27 Napolensthr.
280	— — —	=	81 Napoleond'ors.

5	Franken	=	1 Napoleonsthlr.
20	— —	=	1 Napoleond'or.

---

4 Napoleonthlr = 1 Napoleond'or.

*)

			kr.
2.)	1 fl	=	60.
	1 R. Thlr.	=	90.
	1 C. Thlr.	=	120. (n. d. 20 fl. Fuß)
	1 C. Thlr.	=	144. (n. d. 24 fl. Fuß)
	1 Lbthlr.	=	165.
	1 Kr. Thlr.	=	162.
	1 Franke	=	27,5.
	1 Nap. Thlr.	=	138.
	1 Nd'or.	=	560.

---

*) Bey diesen Angaben (die 3 letzten ausgenommen) sind der Franke, der Napoleonsthlr. und der Napoleond'or nach ihrem Curswerth bey uns verglichen. Es gilt nehmlich der Franke $27\frac{1}{2}$ kr. ($\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ kr. zu wenig) der Napoleonthlr. 2 fl. 18 kr. ($1\frac{7}{32}$ kr. zu wenig) und der Napoleond'or 9 fl. 20 kr. ($3\frac{8}{9}$ kr. zu viel.)

B.

Gewichte (nach Maler)

1 ℔.

Orte	Köln. Gr.	Richtpf.	Asen.
Badenweiler.	8271	141158	10484
Basel.	7889	134638	9999
Durlach.	7680	131072	9735
Freyburg.	7791	132966	9875
Hochberg.	7791	132966	9875
Rheinpfalz.	7680	131072	9735
Rötteln.	8121	138598	10294
Sausenberg.	8271	141158	10484
Würtemberg.	7714	131652	9778

(nach Wild) *

1 ℔.

Orte		℔ Paris. Markgew.
Badenweiler		
Schwergewicht	=	1,0230
Leichtgewicht	=	0,9671
Salzmagazingew.	=	1,0000
Salzstädlergew.	=	0,9552
Basel	=	0,9928

*) Die eingeschloßenen sind nicht von Hrn. Hofr. Wild selbst gesuchte, sondern von andern entlehnte Zahlen

Durlach	=	0,9546
Freyburg		
Naßgewicht	=	1,0262
Trockengewicht	=	0,9676
Hochberg	=	0,9673
Salzpfund	=	0,9570
Rötteln und Sausenberg	=	1,0326
Salzgewicht	=	0,9555
(Köln	=	0,9553)
(Deutsch. Apoth.	=	0,7309)
(Kilogramm	=	2,0429) *)

C.

Maße.

I.

Flüssigkeitsmaße. (nach Maler)

Fdr.

35 Durlacher, (Bruchsaler, Ettlinger, Rastatter) =
= 36 Badenweilerer (Sausenberger).
49 Durl. = 54 Hochberger (Freyburger)

---

*) Die Einheit des neu französischchen Gewichts ist das Gewicht des Regenwassers, beym Gefrierpunkt und zwar am kubischen Inhalt ein Würfel, dessen Seite 1 Centimeter beträgt. Diese Einheit heißt Gramme. Es ist 1 Gramme = 10 Decigr. = 100 Centigr. = = $\frac{1}{10}$ Decagr. = $\frac{1}{100}$ Hectogr. = $\frac{1}{1000}$ Kilogr. = $\frac{1}{10000}$ Myrdag).

39	Durl.	=	40	Lahrer.
14	——	=	15	Rötteler (Basler)
8	——	=	5	Würtemberger.

Ohm. Saum. Eimer.

175	Durl.	=	144	Badenw.
245	——	=	216	Hochberger.
13	——	=	32	Lahrer.
7	——	=	6	Rötteler.
8	——	=	3	Würtemberger.

Vrtl. Imi.

35	Durl.	=	48	Badenweiler.
49	——	=	72	Hochberger.
7	——	=	12	Rötteler.
2	——	=	5	Würtemberger.

Mß.

35	Durl.	=	32	Badenweiler.
49	——	=	48	Hochberger.
39	——	=	32	Lahrer.
7	——	=	8	Rötteler.
6	——	=	5	Würtemberger.

(nach Wild)

Orte.		Pariſ. Kubikzolle.
Durlacher Ohm	=	5747
—— Mß.	=	79,44
(Bruchſaler Ohm	=	5720,4)

(Bruchsaler Mß.	=	79,45)
(Rastatter Ohm	=	5720,4)
(——— Mß.	=	136,2)
(Lahrer Oehmle	=	2323,9
(—— Mß	=	96,83
Hochb. (Freyb.) Saum	=	6660
—— Mß.	=	83,25
—— Schenkmaß	=	70,68
Badenweilerer Saum	=	7280
——— Mß.	=	91,00
Sausenberger Sm.	=	7382
——— Mß.	=	92,27
Rötteler Saum	=	6974,3
——— Mß.	=	72,65
(Constanzer Eimer	=	1936)
(——— Mß.	=	60,5)
(Würtemberger Eimer	=	14638)
(——— Mß.	=	91,48)
(1 Litre	=	50,461) *)

2.

Fruchtmaße (nach Maler)

15	Durl. Simri	=	13	Badenw. Sester.
33	—— Mltr.	=	32	Ettlinger Mltr.

---

*) Die Einheit aller neufranzösischen Hohlmaße ist ein Würfel, dessen Seite 1 Decimetre beträgt. Diese Einheit heißt Litre. Es ist 1 Litre = 10 Decilitre = 100 Centilitre = $\frac{1}{10}$ Decalitre = $\frac{1}{100}$ Hektolitre = $\frac{1}{1000}$ Kilolitre = $\frac{1}{10000}$ Stere.

92 —— Simri = 80 Hochb. Sr.
11 —— Mltr. = 8 Würtemb. Scheffel.
oder genauer
351 —— —— = 256 — — — — —

(nach Wild)

Orte		Pariser Kubikz.
Durl. Mltr.	=	6362
—— Sri.	=	795,2 (808,61)
Emmend. u. Freyb. Vrtl. *)	=	5509
——— Sr.	=	918,2
Endinger Vrtl.	=	5609
——— Sr.	=	934,9
Badenw. Vrtl.	=	5459
——— Sr.	=	909,8
Sausenb. u. Rötteler Mltr.	=	7343
——— Vrtl.	=	1223,8
Basler Sack	=	6924
——— kl. Sr.	=	865,5

3.

Ellenmaße (nach Wild)

Orte		Pariser Fuße.
Badenweiler	=	1,6713
Durlach	=	1,7125

*) 6 Sr. = 1 Vrtl.

Emmendingen	=	1,6720
Freyburg	=	1,6562
(Karlsruh	=	1,6976)
(Lahr	=	1,676)
(Offenburg	=	1,658)
Rötteln	=	1,6848
(Würtemberg	=	1,8896)
(Pariser Stab	=	3,66)

§. 252.

Kommen Brüche in einer Regel de Tri vor, so beseitigt, man entweder dieselben, nach §. 240, Folgerung, 1, oder man läßt sie stehen, und multiplicirt und dividirt, mit Anwendung aller dabey möglichen Vortheile, nach den Regeln, die im 2ten Curs gelehrt wurden. Dieß letztere ist besonders dann rathsam, wenn entweder alle 3 Sätze oder die 2 letzten gebrochene Zahlen sind, in welchem Fall man auch den 1ten Satz bruchsweise ausdruckt.

§. 253.

Sind die beyden ähnlichen Sätze ungleichnamigt gleichartig (z. B. ℔. und Lth.; Ohm und Mß. ꝛc.) so muß vor allen Dingen entweder die höhere Sorte durch Multiplication in die niedrigere, oder diese in jene durch Bildung eines Bruchs verwandelt werden.

§. 254.

Kommen mehrere Sorten in einem Satz vor, so müssen dieselben ebenfalls entweder nach der 1ten Art, auf

die niedrigste, oder nach der 2ten auf die höchste gebracht werden.

§. 255.

Alle Vortheile, deren man sich bey der Regel de Tri bedienen kann, gründen sich auf §. 236, 240, N°. 5 und 6, 252, 253 und 254.

§. 256.

Häufig kommen solche Aufgaben vor, bey denen der Ansatz mit einiger Schwierigkeit verbunden ist. In ihnen sind die 3 Sätze nicht unmittelbar gegeben, sondern müssen erst durch Vorrechnungen (:nicht selten durch mehrfache vorläufige Anwendung der Regel de Tri:) gefunden werden.

§. 257.

Eine nach der Regel de Tri aufgelöste Aufgabe wird gemeiniglich dadurch geprüft, daß man nach gefundenem 4ten Satz, einen der 3 gegebenen als unbekannt ansieht, und denselben durch eine nochmalige Anwendung der Regel de Tri sucht.

§. 258.

Wenn in einer Aufgabe, wie bisher, unmittelbar oder mittelbar, nur 3 Sätze gegeben sind, von denen 2 im

nemlichen, einfachen Verhältnisse stehen, das die 3te gegebene Zahl zur zu suchenden unbekannten hat; so heißt dieß eine einfache Regel de Tri. Die zusammengesetzte, zu der wir nun übergehen, begreift unter sich 1.) die Regel de Quinque, de Septem ꝛc 2.) die Kettenregel (regula multiplex) 3.) die Gesellschaftsregel (regula societatis, und endlich 4.) die Vermischungsregel (regula alligationis.)

§. 259.

Sind in einer Aufgabe 5,7,9 ꝛc. Sätze gegeben, so daß je 2 derselben ein besonderes Verhältnis ausmachen, welche alle in einander multiplicirt (§. 237.) dasjenige zusammengesetzte Verhältnis geben, in welchem die noch übrige 5te, 7te, 9te, ꝛc. Zahl zu der zu suchenden (6ten 8ten, 10ten ꝛc) steht; so gehört diese Aufgabe in die Regel de Quinque, de Septem ꝛc. und zwar in die gerade, wenn alle Paare sich gerade wie die unähnliche Zahl zur unbekannten, und in die verkehrte, wenn 1 oder mehrere Paare sich verkehrt, so verhalten.

Beyspiele:

1.) 100 fl tragen in 3 Jahren 17 fl Zins, wie viel tragen 600 fl in 10 Jahren?

2.) 7 Arbeiter werden in 4 Wochen mit Ausgrabung zweier Keller von einer gewissen Größe fertig, wie viel gleich große Keller werden 20 Arbeiter in 5 Wochen ausgraben?

3.) Wenn 5 Arbeiter in 6 Wochen 1000 Schritt eines Damms aufwerfen, in wie viel Zeit werden 7 Arbeiter mit 988 Schritt fertig?

4.) Ein Acker der 110 Ruthen lang und 2 Ruthen breit ist, kostet 160 fl. wie breit ist ein anderer, der 140 Ruthen in der Länge hat, aber nur 145 fl kostet? *)

Der Ansatz solcher Aufgaben geschieht, wie im §. 250 gelehrt wurde; nur muß man jedes einzelne Verhältnis besonders untersuchen. Es ist im Beyspiel

1.) $\left.\begin{matrix}100 \text{ fl. C.} \\ 3 \text{ F.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}600 \text{ fl C.} \\ 10 \text{ F.}\end{matrix}\right\} = 17 \text{ fl. C.}$

Antwort: 340 fl 3.

2.) $\left.\begin{matrix}7 \text{ A.} \\ 4 \text{ W.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}20 \text{ A.} \\ 5 \text{ W.}\end{matrix}\right\} = 2 \text{ Keller.}$

Antwort: $7\frac{1}{7}$ K.

3.) $\left.\begin{matrix}7 \text{ A.} \\ 1000 \text{ Schr.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}5 \text{ A.} \\ 988 \text{ Schr.}\end{matrix}\right\} = 6 \text{ W.}$

Antwort: $4\frac{41}{175}$ W.

4.) $\left.\begin{matrix}140 \text{ R. L.} \\ 160 \text{ fl.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}110 \text{ R. L.} \\ 145 \text{ fl}\end{matrix}\right\} = 2 \text{ R. Br.}$

Antwort: $1\frac{95}{224}$ R. Br.

---

*) Aufgaben, in denen 3 und mehrere Verhältniße vorkommen, an der Tafel.

Dergleichen Aufgaben können auch wiewohl weitläufiger durch eine wiederhohlte Anwendung der einfachen Regel de Tri, und zwar auf verschiedene Art, aufgelößt werden. Es ist im Beyspiel

1.) a.) 100 fl. C. : 17 fl. Z. = 600 fl C.
3 T. : 102 fl. Z. = 10 T.

oder

b.) 3 T. : 17 fl. Z. = 10 T.
100 fl. : $56\frac{2}{3}$ fl. Z. = 600 fl.

oder

c.) 600 fl. : 3 T. = 100 fl.
$\frac{1}{2}$ T. : 17 fl Z. = 10 T.

2.) a.) 7 A. : 2 K. = 20 A.
4 W. : $5\frac{5}{7}$ K. = 5 W.

oder

b.) 4 W. : 2 K. = 5 W.
7 A. : $\frac{10}{4}$ K. = 20 A.

oder

c.) 5 W. : 7 A. = 4 W.
$\frac{28}{5}$ A. : 2 K. = 20 A.

3.) a.) 7 A. : 6 W. = 5 A.
1000 Schr. : $\frac{30}{7}$ W. = 988 Schr.

oder

b.) 1000 Schr. : 5 A. = 988 Schr.
7 A. : 6 W. = $\frac{988}{200}$ A.

oder

c.) 5 A. : 1000 Schr. = 7 A.
1400 Schr. : 6 W. = 988 Schr.

4.) a.) 140 R. L. : 2 R. Br. = 110 R. L.
160 fl. : $\frac{11}{7}$ R. Br. = 145 fl.

oder

b.) 110 R. L. : 160 fl. = 140 R. L.
$203\frac{7}{11}$ fl. : 2 R. Br. = 145 fl.

oder

c.) 160 fl. : 110 R. L. = 145 fl.
140 R. L. : 2 R. Br. = $99\frac{1}{16}$ R. L.

*) Auch hier können die allgemeinen Proportionen des §. 249 mit unter zur Erläuterung dienen. Es ist nemlich

1.) U : u = W : W } also §. 240 N°. 9.
Z : z = W : w } lit. c.

UZ : uz = W : w

*) Die Fähigkeit der Schüler muß hier entscheiden, ob diese und ähnliche Stellen erklärt, weiter ausgeführt, oder ganz übergangen werden sollen.

2.) W : w = U : u
u : u = Z : z also

uW : uw = UZ : uz (: u)

uW : w = UZ : z und

uW : Uw = Z : z

oder auch

u : U = Z : 3.
W : w = 3 : z

uW : Uw = Z : z

§. 260.

Häufig wird in einer Aufgabe zu dem Verhältnis, in welchem irgend eine gegebene Zahl zu der unbekannten steht, weder unmittelbar durch ein gleiches einfaches, wie in der einfachen Regel de Tri, noch so durch ein gleiches zusammengesetztes Verhältnis, wie in der Regel de Quinque, bestimmt; sondern es wird dieß gleiche Verhältnis zweyer bekannter Zahlen mittelbar, durch Zwischenverhältnisse gegeben.

Dieß wäre, z. B. der Fall in folgender und ähnlichen Aufgaben:

N. soll 196 fl in Napoleond'ors bezahlen. Wie viel dergleichen Goldstücke muß er haben, wenn 24 fl = 10 Kthlr (nach dem 24 fl Fuß) 9 Kthlr. = 8 Kronenthaler und 280 Krthlr. = 81 Napoleond'ors sind?

Hier ist das Verhältnis des fl zum Napoleond'or durch die Zwischenverhältnisse des fl zum Kthlr., des Kthlr. zum Krthlr. und des Krthlr. zum Napoleond'or gegeben. Die Regel, nach welcher solche Aufgaben mit der möglichsten Abkürzung gerechnet werden (denn auch sie lassen sich durch eine wiederholte einfache Regel de Tri auflösen) heißt die Kettenregel (rugula multiplex.)

Versucht man wirklich, obige Aufgabe durch die einfache Regel de Tri aufzulösen, so erhält man folgende Proportionen:

24 fl : 10 Kthlr. = 196 fl : $81\frac{2}{3}$ Kthlr.
9 Kthlr.: 8 Krthlr = $81\frac{2}{3}$ Kthlr. : $72\frac{16}{27}$ Krthlr.
280 Krthlr: 81 Nd'ors = $72\frac{16}{27}$ Krthlr. * Nd'ors.
(§. 240. N°. 9. lit. d.,)

24.9.280 : 10.8.81 = 196 : * Nd'ors.

Die Aufgabe steht demnach kürzer so:

3
24 fl
9 Cthlr. :
280 Krthlr.
= 196 fl : * Nd'ors.

: 4)	28	:	3	=	196 : *
: 7)	7	:	3	=	49
	1	:	3	=	7

3
21 Nd'ors.

Und (nach §. 239) noch kürzer so.

	7
	28
* Nd'ors	196 fl
324 fl.	18 Kthlr.
9 Kthlr.	8 Krthlr.
4	27 3
288 Krthlr.	81 Nd'ors

$$* \times 1 = 21$$

Also $* = \frac{21}{1} = 21$ Nd'ors.

Diesem zu Folge lautet die Kettenregel:

1. Setze die unbekannte Zahl, mit * bezeichnet, links oben an, und neben sie zur Rechten die Fragzahl.

2.) Dann wieder links diejenige Zahl, welche mit der Fragzahl gleinamigt ist, und neben sie zur Rechten die, welche mit ihr gleichen Werth hat.

3.) So fahre fort, bis du endlich zur Rechten eine Zahl erhälst, welche mit der unbekannten gleichen Namen hat.

4.) Verkleinere diese Verhältniszahlen durch gemeinschafftliche Division, so viel wie möglich.

5.) Multiplicire alle noch übrigen sowohl links als rechts stehenden Zahlen in einander, und dividire mit dem 1ten Produkt ins 2te, so erhälst du im Quotienten die gesuchte Zahl.

Wer sonst mit Brüchen rechnen kann, dem werden auch hier die etwa vorkommenden Brüche keine Schwierigkeit verursachen. Nicht nur bey Verwandlung der Geldsorten in einander, sondern auch bey Verwandlung der Gewichte und Maaße und hauptsächlich bey Wechselreduktionen findet diese Regel ihre Anwendung.

§. 261.

Durch gewöhnliche Divisionen wird eine Zahl in beliebig viele gleiche Theile getheilt. Sollen aber die Theile ungleich seyn, so, daß sie ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben; so erfodert dieß eine wiederholte Anwendung der einfachen Regel de Tri, welches Verfahren man die Gesellschaftsrechnung (regula societatis) nennt. Z. B.

A, B und C errichten eine gemeinschaftliche Handlung. A giebt 8000 fl., B 10000 fl. und C 18000 fl. Nach 10 Jahren haben sie 12000 fl. gewonnen; wie viel von diesem gemeinschaftlichen Gewinnst gebührt einem jeden der 3 Theilhaber?

Offenbar müssen hier die einzelen Gewinnste den einzelen Einlagen proportional seyn; es muß sich verhalten E. von A : G. des A = E. von B : G. des B = = E. von C : G. des C.

Werden diese 3 gleichen Verhältnisse (nach §. 247) addirt, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder, d. i. die Summe aller Einlagen, zur Summe aller 2ten Glieder, d. i. zum ganzen gemeinschaftlichen Gewinst, wie eines jeden Einlage zu dem ihm gebührenden Theil des Gewinstes.

Demnach muß bey einer jeden solchen Aufgabe die Regel de Tri so oft angewendet werden, als Theile gegeben sind, wobey jedoch die 2 ersten Sätze immer die nehmlichen bleiben. Deßwegen ist es vortheilhaft, ihr Verhältniß gleich im Anfang (nach §. 240. Folger. 3.) so sehr, wie möglich, zu verkleinern.

Allem bisherigen zu Folge steht die Rechnung der oben als Beyspiel hingegebenen Aufgabe am bequemsten und kürzesten so:

Es legt ein

	fl.
A =	8000
B =	10000
C =	18000
Alle zusammen	36000

— — — gewinnen 12000 fl.

Daher

1.

fl. fl. fl.

12) 36000 : 12000 = 8000

3 : 1 = 8000

8000

3) ———

2666⅔ fl. = dem G. des A.

2. fl.

3 : 1 = 10000

10000

3) ———

3333⅓ fl. = dem G. des B.

3. fl.

3 : 1 = 18000

18000

3) ———

6000 fl. = dem G. des C.

Werden die auf diese Art gefundenen Theile (hier die einzelnen Gewinste) addirt; so muß das Ganze, das getheilt werden sollte, (hier der gemeinschaftliche Gewinst) wieder herauskommen; und hierinn besteht die gewöhnliche Prüfung dieser Regel.

A.) 2666⅔

B.) 3333⅓

C.) 6000

12000 fl. = dem gem. Gew.

Von solchen Aufgaben, wie die eben berechnete, rührt der Name: Gesellschaftsregel her. Sie findet übrigens ihre Anwendung nicht bloß bey Handlungs-, sondern auch bey sonstigen Theilungsgeschäften, bey Ver-

mögenssteuern und bey Vermischung von verschiedenen Ingredienzen, deren Verhältniß zu einander bekannt ist.

Auch hier kommen häufig Aufgaben vor, bey denen der Ansatz mit einiger Schwierigkeit verbunden ist, wenn nemlich die dazu nöthigen Zahlen nicht unmittelbar gegeben sind, sondern durch Vorrechnungen erst gesucht werden müssen. Dieß ist z. B. der Fall in der Aufgabe:

Vier verliehren bey einer gemeinschaftlichen Unternehmung 300 Louisd'ors. A gab $\frac{3}{4}$ so viel als B, B $\frac{1}{6}$ von C, C $\frac{1}{3}$ von D und D 1000 L.; wie viel verliert jeder?

Antwort: A.) $8\frac{380}{515}$; B.) $11\frac{335}{515}$; C.) $69\frac{465}{515}$; D.) $209\frac{365}{515}$ L.

Sind bey einem gesellschaftlichen Unternehmen nicht bloß die Beyträge, sondern auch die Zeiten verschieden, durch welche jeder seinen Beytrag zur Unternehmung mitwirken läßt; so verhalten sich die einzeln Gewinste oder Verluste einmal wie die Beyträge, sodann aber auch wie die Zeiten; d. h. sie stehen im zusammengesetzten Verhältniß beyder, oder sie verhalten sich, wie die Produkte aus den Beyträgen in die ihnen zugehörige Zeiten. Man nennt dieß die zusammengesetzte Gesellschaftsregel.

Eine Aufgabe dieser Art wäre z. B. folgende:

Drei gewinnen in ihrer gemeinschaftlichen Handlung 600 fl.

A hat zum Handlungscapital beygetragen 4000 fl. auf 8 Monat; B 3300 fl. auf 10 Monat und C 6000 fl. auf 5 Monat; wie viel erhält jeder?

Antwort und Prüfung.

	fl.
A	= 202 $\frac{10}{95}$
B	= 208 $\frac{40}{95}$
C	= 189 $\frac{45}{95}$
Alle zusammen	600 fl.

	fl.	M.	Produkte.
A trägt bey	4000	auf 8	32000
B — —	3300	— 10	33000
C — —	6000	— 5	30000
Alle	3	=	95000

Daher

I.

95000 : 600 fl. = 32000

2) 475 : 3 = 32000

5) 85 : 3 = 6400

19200 | 95

190 | 202 $\frac{10}{95}$ fl.

200

190

$\frac{10}{95}$

2.

475 : 3 = 33000

5)

95 : 3 = 6600

19800	95
190	208 $\frac{40}{45}$ fl.
800	
760	
$\frac{40}{95}$	

3.

475 : 3 = 30000

5)

95 : 3 = 6000

18000	95
95	189 $\frac{45}{95}$ fl.
850	
760	
900	
855	
$\frac{45}{95}$	

§. 262.

Wenn 2 ähnliche Dinge von verschiedenem Werth, z. B. ein besserer und ein schlechterer Wein, so vermischt werden sollen, daß die Mischung einen bestimmten

mittlern Werth erhalte; so heißt die Regel, nach der man findet, wie viel von jedem genommen werden muß, die Vermischungsregel (regula alligationis). Gesetzt, man hätte alten Wein, von dem die Ohm 30 fl. gilt, und neuen, von welchem die Ohm nur 11 fl. kostet. Ein Weinhändler wollte beyde so mischen, daß die Ohm auf 18 fl. käme, wie viel müßte er von jedem nehmen?

Solche und ähnliche Aufgaben lassen sich durch die gewöhnliche Regel de Tri auf folgende Art auflösen:

Wird 1 Ohm vom 30 fl. Wein für 18 fl. verkauft, so werden 30 — 18 = 12 fl. verlohren. Schüttete man 1 Ohm vom 11 fl. Wein dazu, so würden daran 18 — 11 = 7 fl. gewonnen. Nun müssen aber nicht nur 7 fl., sondern 12 fl. am Schlechten gewonnen werden, so viel als nemlich am Guten verlohren wird, folglich muß mehr als 1 Ohm vom schlechten genommen werden. Daher

7 fl. : 1 Ohm = 12 fl.

$\frac{12}{7}$ Ohm vom schlechten.
1 = $\frac{7}{7}$ Ohm vom guten.

zusammen $\frac{19}{7}$ Ohm.

Nunmehr schließt man: Zu $\frac{19}{7}$ Ohm Gemisch wird 1 Ohm guter Wein genommen; wie viel zu 1 Ohm Gemisch?

$\frac{19}{7}$ Ohm : 1 Ohm = 1 Ohm

19 : 7 = 1

$\frac{7}{19}$ Ohm vom guten zu 1 Ohm Gemisch.

Da nun 7 = 18 — 11, und 19 = 30 — 11, so wird der Bruch vom bessern Wein gefunden, wenn man

1) vom mittleren Preise den Preis des schlechten,

2) vom Preis des bessern den mittleren Preis abzieht, und

3) die erste Differenz (No. 1.) zum Zähler, die 2te (No. 2.) zum Nenner macht.

Zieht man $\frac{7}{19}$ von 1 = $\frac{19}{19}$ ab, so erhält man $\frac{12}{19}$ = der Menge des schlechtern. Es ist aber 12 = 30 — 18, und 19 wieder = 30 — 11. Daher wird Bruch des schlechten gefunden, wenn man

1) Vom Preis des bessern den mittlern Preis,

2) aber auch den Preis des schlechtern abzieht, und abermals

3) die erstere Differenz zum Zähler, die 2te zum Nenner macht. Hat man auf diese Art berechnet' wie viel vom bessern oder schlechtern zu 1 Ohm, 1 Maaß ꝛc. ꝛc. genommen werden muß, so läßt sich durch die einfache Regel de Tri leicht bestimmen, wie viel z. B. zu 6 Ohm, 288 Maaß ꝛc. ꝛc. Gemisch von jedem genommen werden müssen. Es ist

$$1 : \tfrac{7}{19} = \begin{cases} 6 \\ 288 \end{cases}$$

$$\text{oder } 1 : \tfrac{12}{19} = \begin{cases} 6 \\ 288 \end{cases}$$

Soll Wasser unter dem Wein gemischt werden, so ist der Preis des schlechteren = o. z. B. Die Maaß Wein koste 2 fl.; wie viel Wasser muß man unter 1 Maaß nehmen, damit sie für 1 fl. 12 kr. gegeben werden könne?

Antwort: $\frac{2}{5}$ Maaß Wasser.

I.

2 fl. = 1 fl. 60 kr.

1 fl. 12 kr.

Differ. = 48 kr. folgl. 48 = dem Zähler.

2.

2 fl.
0 fl.

Differ. = 2 fl. = 120 kr. folgl. 120 dem Nenner.

3.

$\frac{48}{120}$ = $\frac{4}{10}$ = $\frac{2}{5}$ Maaß = der Menge Wassers, und 1 — $\frac{2}{5}$ = $\frac{3}{5}$ Maaß = der Menge Weins.

Die Prüfung dieser Regel geschieht, wenn man vermittelst der einfachen Regel de Tri den Preis von einem jeden Theil der Mischung berechnet, beyde Preise zusammen addirt, und sieht, ob die Summe derselben = dem verlangten mittleren Preis ist.

Prüfung des 1ten Beyspiels.

1) 1 Ohm : 30 fl. = $\frac{7}{19}$ Ohm.

19 : 30 = 7

2'10	19
19	11 $\frac{1}{19}$ fl.
20	
19	
1	
19	

2) 1 Ohm : 11 fl. = $\frac{12}{19}$ Ohm.

19 : 11 = 12

132	19
114	6 $\frac{18}{19}$ fl.
$\frac{18}{19}$	

3) 11 $\frac{1}{19}$ fl.
6 $\frac{18}{19}$ fl.

18 fl. = dem verlangten mittlern Preis.

Diese Regel findet auſſer beym Wein = Frucht = ꝛc. ꝛc. Handel auch häufig ihre Anwendung beym Münzweſen und bey ſonſtiger Verarbeitung der Metalle.

Von den geometriſchen Progreſſionen.

§. 263.

Eine fortgeſetzte ſtetige geometriſche Proportion (§. 242) oder eine Reihe von Zahlen, bey denen alle Exponenten (§. 232.) gleich ſind; heißt eine geometriſche Progreſſion oder eine geometriſche Reihe.

§. 264.

Auch hier gibt es, wie im §. 221, steigende und fallende, und was dort von den letzten bemerkt worden ist, gilt auch hier.

§. 265.

Ehe wir nun weiter, zur Auflösung der gewöhnlichsten Progressionalaufgaben vorschreiten, ist es nöthig, uns an die (§. 171 und 189.) gegebenen Begriff von Quadrat- und Kubikzahlen zu erinnern, und diese Begriffe hier zu erweitern.

Man nennt eine Quadratzahl auch die zweite und den Cubus die dritte Potenz der dazu gehörigen Wurzel. Der Kubus uoch einmal mit der Wurzel multiplicirt giebt die vierte, und die 4te abermals mit der Wurzel multiplicirt gibt die fünfte Potenz ꝛc. ꝛc. Um solche Potenzen kurz zu bezeichnen, schreibt man zur rechten Hand, oberhalb neben die Wurzel diejenige Zahl, welche anzeigt, die wievielte Potenz der Wurzel es seyn soll. So bedeutet z. B. 3^5 die 5te und 3^{27} die 27te Potenz von 3. Diese zur rechten Hand, oberhalb stehenden Zahlen werden auch Exponenten genannt; wir wollen sie zum Unterschiede von Verhältnißexponenten, Potenzexponenten nennen. Sie zeigen eigentlich an, wie oft die Wurzel in der Multiplication angesetzt werden müsse, damit eine gewisse Potenz derselben zum

Vorschein komme. So muß in obigen 2 Beyspielen bey 3^5 die Wurzel 3 fünfmal, und bey 3^{27} dieselbe 27mal in der Multiplication angesetzt werden, damit im erstern Fall die fünfte, im letzten die 27te Potenz von 3 erscheinen.

§. 266.

Ist das erste Glied einer zunehmenden Reihe und der Exponent derselben gegeben, so wird das wievielste Glied, als man immer will, gefunden, wenn man den Exponenten der Progression zur eben so vielten Potenz erhebt als die Zahl der vorhergehen, den Glieder Einheiten hat, und sodann diese Potenz mit dem 1ten Gliede multiplicirt. Soll also das letzte gefunden werden, so wird der Exponent zur eben so vielten Potenz erhoben, als die Zahl aller Glieder weniger Eins Einheiten enthält.

Es ist Zahl d. Gl. — 1.

l. Gl. = 1te Gl. × Exponent.

Beyspiele.

Es seye die Reihe:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
2.	4.	8.	16.	32.	64.

Gegeben	zu finden
das 1te Glied = 2	das 5te Glied.
der Exponent = 2.	

1.

Exponent = 2

2

4

2

8

2

16 = 2^4 = der eben so vielten Potenz des Exponenten, als die Zahl der vorhergehenden Glieder, 4, Einheiten hat.

2.

2^4 = 16

1tes Gl. = 2

3^2 = dem 5ten Gl.

Es seye die Reihe:

I.	II.	III.	IV.	V.	.....	XI.
2.	6.	18.	54.	162.	.....	

Gegeben	Zu finden
das 1te Glied = 2	das letzte Glied.
der Exponent = 3	
die Zahl d. Gl. = 11.	

$$3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3 = 59049 =$$
$$\overbrace{}^{1.}$$
$$= 3^{11-1} = 3^{10}$$
$$\overbrace{\phantom{3^{10}}}^{2.}$$

$3^{10} = 59049$
1tes Gl. $= 2$

118098 = dem 11ten oder letzten Gliede.

§. 267.

Auf dieselbe Art, wie im §. 223, läßt sich auch hier die Regel bestimmen, durch die man aus dem gegebenen letzten Gliede, den Exponenten und der Zahl der Glieder das 1te Glied findet. Es ist

$$1\text{tes Gl.} = \frac{\text{l. Gl.}}{\text{Zahl d. Gl.} - 1}$$
$$\text{Exponent.}$$

Beyspiel.

Es seye die Reihe:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.

Gegeben
l. Gl. = 192
Expon. = 2
Zahl d. Gl. = 7

Zu finden
das 1te Glied.

1.

Zahl d. Gl. — 1
Expon. $= 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$.

2.

1. Gl. $= 192 \mid 64$
$\underline{192 \mid 3 = \text{dem 1ten Gl.}}$
0

*)

§. 268.

Wer das 1te Glied, den Exponenten und die Zahl der Glieder kennt, der kann die ganze Progression hinschreiben, folglich auch, wie im §. 226, die Summe aller Glieder durch gewöhnliche Addition derselben finden. Weit kürzer aber geschieht dieß nach einer Regel, die wir nun auffinden wollen.

Die Progression habe 5 Glieder, und sey

---

*) $\text{Expon.} = \sqrt{\frac{\text{3. d. Gl.} - 1}{\frac{\text{1. Gl.}}{\text{1tes Gl.}}}}$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
2.	6.	18.	54.	162.	486.
oder 2.	2×3.	2.3^2.	2.3^3.	2.3^4.	2.3^5

Man multiplicire die Summe derselben mit dem um Eins verringerten Exponenten:

$$\frac{2 + 2 \times 3 + 2.3^2 + 2.3^3 + 2.3^4}{\times 2 (= 3 - 1)}$$

$$\frac{}{4 + 4.\ 3 + 4.3^2 + 4.3^3 + 4.3^4}$$

Folgl. Summe × (Exp. — 1) = 4 + 12 + 36 + 108 + 324 = 484.

Da nun das 6te, oder Eins weiter als das letzte Glied = 486 = 2.3^5 und die Differenz zwischen diesem und dem ersten Glied = 486 — 2 ebenfalls = 484 ist; so ist auch die Summe × (Expon. — 1) = $2.3^5 - 2$ oder, (da die Zahl d. Gl. = 5) = 1ten Gl. × Expon. Zahl d. Gl. Hieraus entsteht, wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt,

$$S. = \frac{\text{1ten Gl.} \times \text{Exp. Zahl d. Gl.} - \text{1te Gl.}}{(\text{Expon.} - 1)}$$

*)

*) Summe = $\frac{\text{l. Gl.} - \text{1ten Gl.}}{\text{Expon.} - 1} + \text{l. Gl.}$

Es wird demnach die Summe gefunden, wenn man

1.) den Exponenten zur eben so vielten Potenz erhebt, als die Zahl der Glie. der Einheiten hat;

2.) diese Potenz ins erste Gied multiplicirt;

3.) von dem Produkt in (N°. 2.) das erste Glied abzieht, und

4.) in die Differenz (N°. 3.) mit dem um Eins veringerten Exponenten dividirt.

Beyspiel.

Es sey die Progression:

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.

I. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Gegeben		Zu finden
das 1te Gl.	= 1	die Summe
der Exp.	= 3	
d. Z. d. Gl.	= 8	

1.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^9 = 6561.$

2 u. 3.

$3^8 = 6561$

× 1ten Gl. $= 1$

6561

— 1tes Gl. $= 1$

6560

4.

(Exp. — 1) $=$ 2.) $\frac{6560}{3280} =$ der Summe.

§. 269.

Leicht lassen sich aus der Regel des vorigen §. 2 andere herleiten, durch deren Hilfe man aus der Summe dem Exponenten und der Zahl der Glieder das 1te oder auch das letzte Glied finden kann. Es ist

$$\text{1tes Gl.} = \frac{\text{S.} \times (\text{Expon.} - 1)}{(\text{Expon. Zahl d. Gl.} - 1)}$$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
2.	4.	8.	16.	32.	64.

Gegeben — Zu finden

die S. = 126 — das 1te Gl.
der Exp. = 2
d. Z. d. Gl. = 6

1.

S. = 126
× (Exp. — 1) = 1
126

2.

126 | 63 (= $2^6 - 1$)
126 | 2 = dem 1ten Gl.
0

§. 270.

Soll aus denselben Stücken das letzte Glied gefunden werden so sucht man zuerst nach §. 269, das 1te und sodann, nach §. 266, aus dem 1ten, dem Exponenten und der Zahl der Gl. das letzte.

I.	II.	III.	IV.	V.
$\frac{3}{2}$.	6.	24.	96.	384.

Gegeben		Zu finden
S.	$= 5\,11\frac{1}{2}$	das letzte Gl.
Expon.	$= 4$	
z. d. Gl.	$= 5^1$	

A.

1.) S. $= 5^1\,1\frac{1}{2}$

× (Expon. − 1) $= 3$

$1534\frac{1}{2}$

2.) $1534\frac{1}{2}$ | $1023 \; (= 4^5 - 1)$

1023 | $1\frac{1}{2} =$ dem 1ten Gl.

$5\,11\frac{1}{2}$

1023

2

1023 $= \frac{1}{2}$

B. (nach §. 266.)

$4^4 = 256$

× 1ten Gl. $= 1\frac{1}{2}$

256

128

384 = dem letzten Gl.

*)

*) Expon. $= \frac{\text{S} - \text{1ten Gl.}}{\text{S.} - \text{1. Gl.}}$

Anwendung der bisher vorgetragenen Regeln auf

§ 271.

Da das Erheben der Exponenten zu hohen Potenzen sehr beschwerlich ist, so folgen hier einige Potenzentafeln der Zahlen 2, 3, 5, 20, 21, 50 und 53, indem die 3 ersten Zahlen überhaupt öfters als Progressionalexponenten vorkommen, und bey Zins von Zins-Rechnungen zu 5 und 6 pr.C. die Exponenten $\frac{21}{20}$ und $\frac{53}{50}$ sind.

2.

1	2	10	1024	19	524288	28	268435456
2	4	11	2048	20	1048576	29	536870912
3	8	12	4096	21	2097152	30	1073741824
4	16	13	8192	22	4194304	31	2147483648
5	32	14	16384	23	8388608	32	4294967296
6	64	15	32768	24	16777216	33	8589934592
7	128	16	65536	25	33554432	34	17179869184
8	256	17	131072	26	67108864	35	34359738368
9	512	18	262144	27	134217728	36	68719476736

Großen Vortheil hierbey gewähren Tafeln von der Art, wie die im folgenden §.; einen noch größern die Decimalbrüche (W. Fr. Wucherers Beyträge zum allgemeinern Gebrauch der Decimalbrüche, verschiedene geometrische Progressionalaufgaben, hauptsächlich auf Zins von Zins = Rabat = und Terminenrechnungen.

Carlsr. 1795. IXte XIIte Anhangstafel.) Die Vortheile vermittelst der Logarithmen und die Berechnung der Gliederzahl kommen im 3ten Abschnitt vor.

3.

1	3	10	59049	19	1162261467
2	9	11	177147	20	3486784401
3	27	12	531441	21	10460353203
4	81	13	1594323	22	31381059609
5	243	14	4782969	23	94143178827
6	729	15	14348907	24	282429536481
7	2187	16	43046721	25	847288609443
8	6561	17	129140163	26	2541865828329
9	19683	18	387420489	27	7625597484987

5.

1	5	10	9765625	19	190734863281 25
2	25	11	48828125	20	953674316406 25
3	125	12	244140625	21	4768371582031 25
4	625	13	1220703125	22	23841857910156 25
5	3125	14	6103515625	23	119209289550781 25
6	15625	15	30517578125	24	596046447753906 25
7	78125	16	152587890625	25	2980232238769531 25
8	390625	17	762939453125	26	14901161193847656 25
9	1953125	18	3814697265625	27	74505805969238281 25

	20.	21.
1	20	21
2	400	441
3	8000	9261
4	160000	194481
5	3200000	4084101
6	64000000	85766121
7	1280000000	1801088541
8	25600000000	37822859361
9	512000000000	794280046581

	50.	53.
1	50	53
2	2500	2809
3	125000	148877
4	6250000	7890481
5	312500000	418 95493
6	15625000000	22164361129
7	781250000000	1174711139837
8	39062500000000	62259690411361
9	1953125000000000	3299763591802133

§. 272.

Es sey das 1te Glied einer abnehmenden geometrischen Reihe z. B. $= 1$; so muß, damit jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende werde, der Exponent ein eigentlicher Bruch seyn, z. B. $= \frac{2}{3}$. Wird diese Reihe ohne Aufhören fortgesetzt, so werden die Glieder immer kleiner und kleiner, nähern, sich der 0 immer

mehr, bleiben aber dennoch immer um etwas größer als Nichts. Dieß Etwas aber wird, wenn mann sich die Reihe weit genug fortgesetzt denkt, zuletzt so klein, daß man das Glied, ohne einen Fehler zu begehen, für o annehmen kann.

Die Progression wäre demnach

I.	II.	III.	IV.	—	—	— ins Unendliche
I.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{4}{9}$.	$\frac{8}{27}$.	—	—	— ein unendlich kleiner Bruch, der $=$ o gesetzt werden kann.

Kehrt man diese Reihe um, so wird sie steigend:

ein unendlich kleiner Bruch, der $=$ o gesetzt werden kann.	—	—	$\frac{8}{27}$.	$\frac{4}{9}$.	$\frac{2}{3}$.	I. (I $\times$ $\frac{3}{2}$

l. Glied

Hier ist

das 1te Gl. ein Bruch $=$ o; das l. Gl. $=$ 1; der Exponent $=$ dem ungekehrten vorigen $=$ $\frac{3}{2}$; eins weiter als das l. Gl. $=$ I $\times$ $\frac{2}{3}$. Folglich, nach der Regel des §. 268, die Summe $=$

$$\frac{I \times \frac{2}{3} - o}{\frac{3}{2} - I} = \frac{I \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{I \times 3}{I} = \frac{I \times 3}{3 - 2} = 3$$

Vergleicht man nun die Summe $\frac{1 \times 3}{3 - 2}$ mit der ersten, fallenden Pergenssion, so ist 1 das erste Glied, 3 der Nenner und 2 der Zähler des Exponenten $\frac{2}{3}$. Es ist demnach bey jeder unendl. abnehmenden Reihe

$$\text{die S.} = \frac{\text{1ten Gl.} \times \text{Nenner des Exp.}}{\text{Nenner} - \text{Zähler des Exp.}}$$

Von der Richtigkeit dieser gefundenen Regel kann man sich noch mehr durch folgende und ähnliche Aufgaben überzeugen:

Man will von Basel 600 fl postfrey nach Leipzig schicken. Sie können aber in Basel nicht frankirt, sondern das Porto muß beygelegt werden. Wie viel muß man beylegen, wenn der Gulden 3 kr. kostet?

Diese Aufgabe läßt sich als eine gewöhnliche Proportionalaufgabe auflösen, indem man nach der Regel de Tri spricht: damit 57 kr. in Leipzig erhalten werden, muß ich 60 kr. oder 1 fl schicken; wie viel, damit 600 fl daselbst nach Abzug des Postgelds übrig bleiben?

Wird hingegen die Aufgabe als eine Progressionalaufgabe betrachtet; so bildet das Postgeld eine unendlich abnehmende Reihe, deren 1tes Glied = dem Porto von 600 fl, das 2te = dem Porto vom 1ten Porto, das 3te = dem Porto vom 2ten Porto ꝛc. ist.

1te Auflösung.

57 kr. : 60 kr. = 600 fl

6 0

36000 kr. | 57

342 | 631 $\frac{33}{57}$ fl.

180

171

90

57

$\frac{33}{57}$ fl.

Das Porto allein beträgt mithin 31 $\frac{33}{57}$ fl.

2te Auflösung

Hier ist gegeben

das 1te Glied = $\frac{600}{20}$ fl (weil 3 kr = $\frac{1}{20}$ fl.)

der Expon. = $\frac{1}{20}$; und

zu finden die Summe.

Also

$$S. = \frac{\frac{600}{20} \times 20}{20 - 1} = \frac{600}{19}$$

600 | 19

57 | 31 $\frac{33}{57}$ fl = dem sämtl. Postgeld.

30

19

$\frac{11}{19} = \frac{33}{57}$ fl

Dritter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 273.

Bey 2 Propressionen, von denen die eine, eine geometrische, die andere eine arithmetische ist, z. B.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

heißt irgend ein Glied der letztern der Logarithme des eben so vielten Glieds der erstern. Es ist z. B. 4 der Logarithme von 16; 6 der Logarithme von 64 ꝛc.

Dieser Nahme ist aus der griechischen Sprache *) entlehnt, und kann in die deutsche am kürzesten durch das

*) αριθμος λογων

Wort: Verhältnißzahl übersetzt werden. Es enthält nemlich eine solche Zahl eben so viel Einheiten, als gleiche Verhältnisse zwischen dem 1ten Gliede der geometrischen Reihe und demjenigen Gliede derselben liegen, dessen Logarithme sie ist. Es war die Zahl 4 der Logarithme von 16, die Zahl 6 der Logarithme von 64; es liegen aber auch zwischen 1 und 16 vier, und zwischen 1 und 64 sechs gleiche Verhältnisse.

§. 274.

Die Eigenschaften der Logarithmen und der daraus hervorgehende Nutzen derselben sind:

1) Die Summe der Logarithmen zweyer oder mehrerer Zahlen ist = dem Logarithmen des Produkts dieser Zahlen.

Beyspiel. *)

Der Log. von 4 ist = 2
" = = = 16 = = 4

Summe der Log. = 6
dazu gehörige Zahl = 64
Aber auch 4 × 16 = 64.

*) Wie hier, so sind auch in den folgenden Beyspielen die im §. 273 Beyspielsweise angenommenen Progressionen zu Grunde gelegt.

Statt 2 oder mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren, darf man also nur ihre Logarithmen zusammen addiren, und die zur Summe derselben gehörige Zahl aufsuchen, so hat man das Produkt. — Logarithmen verwandeln Multiplication in Addition.

2) Da Potenzen Produkte ans lauter gleichen Faktoren sind, so folgt aus Nro. 1 unmittelbar, daß der mit dem Exponenten einer Potenz multiplicirte Logarithme der Wurzel = sey dem Logarithmen der Potenz.

Beyspiel.

Es ist 64 = der 3ten Potenz von 4 = 4^3;
4 die dazu gehörige Wurzel;
der Log. derselben = 2
× mit 3 (mit dem Exponenten.)

Logar. der 3ten Potenz = 6
Aber auch die dazu gehörige Zahl = 64.

Statt Wurzeln durch mühsame Multiplicationen zu gewissen Potenzen zu erheben, darf man also nur den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der verlangten Potenz multipliciren, und die zum Produkt gehörige Zahl aufsuchen, so hat man die Potenz. — Logarithmen verwandeln das Erheben zu Potenzen in leichte Multiplicationen.

3) Die Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen ist = dem Logarithmen des Quotienten dieser Zahlen.

Beyspiel.

Der Log. von 32 ist = 5
: : : 2 : = 1

Differenz der Log. = 4
Dazu gehörige Zahl = 16
Aber auch $\frac{32}{2}$ = 16.

Statt 2 Zahlen in einander zu dividiren, darf man also nur ihre Logarithmen von einander abziehen, und die zur Differenz derselben gehörige Zahl aufsuchen, so hat man den Quotienten. — Logarithmen verwandeln Division in Subtraktion.

4) Aus demselben Grunde, der in Nro. 2 angegeben wurde, folgt unmittelbar aus Nro. 3, daß der mit einem Exponenten dividirte Logarithmen einer Potenz = sey dem Logarithmen der Wurzel.

Beyspiel.

Es ist 2 = der Kubikwurzel aus 8 = $\sqrt[3]{8}$;
8 die dazu gehörige Potenz;
der Logar. derselben = 3
: durch 3 (durch den Exp.)
Logar. d. $\sqrt[3]{}$ = 1

Aber auch die dazu gehörige Zahl = 2.

Statt aus Potenzen mühsam die Wurzeln zu ziehen, darf man also nur den Logarithmen der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Wurzel dividiren, und die zum Quotienten gehörige Zahl aufsuchen, so hat man die Wurzel. Logaritmen verwandeln das Wurzelausziehen in leichte Divisionen.

5) Da (nach dem 2ten Curs, §. 118) Brüche Quotienten sind, so folgt ferner aus Nro. 3, daß man den Logarithmen eines Bruchs erhalten werde, wenn vom Logarithmen seines Zählers der Logarithme seines Nenners subtrahirt wird. Da aber bey eigentlichen Brüchen der Zähler kleiner als der Nenner, so subtrahirt man in diesem Falle den Logarithmen des Zählers vom Logarithmen des Nenners, und setzt vor die Differenz ein Minuszeichen, welches anzeigt, daß dieser Logarithme des Bruchs da, wo er addirt werden sollte, subtrahirt, und da, wo er subtrahirt werden sollte, addirt werden muß.

So ist z. B. der Logarithme von $\frac{2}{16}$ = dem Logarithmen von 2 weniger dem Logarithmen von 16 = 1 — 4 oder = — 3. *)

---

*) Hat der Lehrer schon im 1ten Curs (§. 63. Anmerk.) seinen Schülern deutliche Begriffe von entgegen gesetzten Größen beygebracht; so bedürfen sie natürlicher Weise hier dieser Erläuterung nicht.

§. 275.

Zwei solche Reihen, wie die im §. 273 angenommenen, heißen, wenn sie hinlänglich fortgesetzt sind, ein Logarithmensystem. An sich sind nun zwar unzählige solche Systeme möglich; es ist aber nur Eines, nemlich das von seinem Berechner, Heinrich Brigg, den Namen führende Briggische System, seiner großen Bequemlichkeit halber, allgemein eingeführt worden. Die Logarithmen desselben heißen auch gemeine Logarithmen.

Auf der folgenden Seite ist dieses System dargestellt.

Die Briggischen Reihen sind:

Geometrische Reihe.		Arithmetische Reihe.
1	0	
2		0,3010300
3		0,4771213
4		0,6020600
5		0,6989700
6		0,7781513
7		0,8450980
8		0,9030900
9		0,9542425
10	1	
11		1,0413927
12		1,0791812
13		1,1139434
14		1,1461280
15		1,1760913
16		1,2041200
17		1,2304489
18		1,2552725
19		1,2787536
20		1,3010300
21		1,3222193
22		1,3424227
23		1,3617278
ꝛc. ꝛc.		ꝛc. ꝛc.
100	2	
101		2,0043214
ꝛc. ꝛc.		ꝛc. ꝛc.
1000	3	
ꝛc. ꝛc.		ꝛc. ꝛc.

Aus dieser Darstellung erhellt:

1) daß die geometrische Reihe aus den Hauptgliedern 1, 10, 100, 1000 ꝛc. ꝛc. und aus Zwischengliedern bestehe, welche mit jenen, die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen ausmachen;

2) daß in der arithmetischen Reihe die den Hauptgliedern der geometrischen entsprechenden Glieder die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen 0, 1, 2, 3 ꝛc. ꝛc. die übrigen aber Decimalbrüche seyen. Sie wurden durch übereinstimmende Berechnung mittlerer geometrischer und arithmetischer Proportionalzahlen durch Annäherung gefunden, und sind demnach nur beynahe wahr; desto wahrer, je mehr Decimalstellen sie haben.

3) Auch die den Hauptgliedern der geometrischen Reihe entsprechenden Glieder der arithmetischen werden gemeiniglich als Decimalbrüche ausgedruckt. Es ist Z. B. der Log. von 1000 = 3,0000000.

4) Die Ganzen der Decimalbrüche heißen die Charakteristik des Logarithmen. Sie ist jederzeit = der Anzahl der Ziffern der dazu gehörigen Zahl weniger Eins. Die Decimalstellen heissen die Mantisse.

Was übrigens die Einrichtung der logarithmischen Tafeln, das Aufsuchen der Logarithmen zu gegebenen Zahlen, und der Zahlen zu vorgegebenen Logarithmen betrifft, so verweise ich hier auf die allen dergleichen Tafeln voran-geschickte, diesen Gegenstand ausführlich behandelnde Einleitungen.

Unter diesen Tafeln dürfte wohl theils wegen dem geringen Preis, theils wegen der Korrektheit, Georg Vega's logarithmisches Handbuch eine vorzügliche Empfehlung verdienen.

§. 276.

Ueberall, wo multiplicirt, oder dividirt, zu Potenzen erhoben, oder eine Wurzel ausgezogen werden soll, können die Logarithmen, nach §. 274, unter gewissen Umständen mit Vortheil angewendet werden; also auch bey der Regel de Tri.

Statt die 2 letzten Sätze zu multipliciren, werden ihre Logarithmen addirt, und statt mit dem 1ten Satz zu dividiren, wird der Logarithme desselben von jener Summe subtrahirt, und so der Logarithme der gesuchten Zahl gefunden. Es bilden hier die zu den 4 Gliedern der geometrischen Proportionen gehörigen Logarithmen eine arithmetische Proportion, zu deren 4ten Glied die dazu gehörige Zahl in den Tafeln aufgeschlagen werden kann. Diese Anwendung der Logarithmen ist besonders dann sehr vortheilhaft, wenn der 1te und einer von den beyden letzten

Sätzen sehr große Zahlen sind, *) oder auch bey häufigen Maaß ꝛc. ꝛc. Verwandlungen (im Fall des §. 249 Lit. C. c.) wenn die beyden ersten Sätze immer dieselben bleiben.

Beyspiel.

Wie viel machen 72, 81, 95, 304, 608, 712 Freyburger Ellen Pariser Stab?

Da 1 Freyb. Elle = 1,6562 und 1 Pariser Stab = 3,66 Pariser Fuß; so wäre der Ansatz:

$$3{,}6600 : 1{,}6562 = \begin{cases} 72 \\ 81 \\ 95 \\ 304 \\ 608 \\ 712 \end{cases}$$

Nun ist

Log. 36600 = 4,5634811

— 16562 = 4,2191128

— 72 = 1,8573325

— 81 = 1,9084850

— 95 = 1,9777236

— 304 = 2,4828736

— 608 = 2,7839036

— 712 = 2,8524800 Daher

*) Wie in der Trigonometrie.

1) 6,0764453

1,5129642

Dazu gehörige Zahl = 32,580

2) 6,1275978

1,5641167

Dazu gehörige Zahl = 36,653

3) 6,1068364

1,6333553

Dazu gehörige Zahl = 42,988

4) 6,7019864

2,1385053

Dazu gehörige Zahl = 137,564

5) 7,0030164

2,4395353

Dazu gehörige Zahl = 275,128

6) 7,0715928

2,5081117

Dazu gehörige Zahl = 322,189

§. 277.

Vergleicht man den §. 274 mit den §§ 266 — 270 und 272, so ergibt sich daraus die Anwendung der Logarithmen auf die geometrischen Progressionalaufgaben.

Es ist

1) Log. d. l. Gl. = Log. d. 1ten Gl. + (Z. d. Gl. — 1) × Log. des Exponenten.

2) Log. d. 1ten Gl. = Log. d. l. Gl. — (Z. d. Gl. — 1) × Log. des Exp.

3) $\text{Log. d. Exp.} = \frac{\text{Log. d. l. Gl.} - \text{Log. d. 1ten Gl.}}{(\text{Z. d. Gl.} - 1)}$

4) $\text{Zahl d. Gl.} = \frac{\text{Log. d. l. Gl.} - \text{Log. d. 1ten Gl.}}{\text{Log. des Exp.}} + 1$

5) Log. des S. = Log. von der Zahl ((Log. d. 1ten Gl. + Z. d. Gl. × Log. des Exp.) — dem 1ten Gl.) — Log. d Expon. — 1)

6) Log. d. 1ten Gl. = Log d. S. + Log. (Exp. — 1) — Log. von der Zahl ((Z. d. Gl. × Log. des Exp.) — 1)

7) Log. d. Exp. = Log. (S. — dem 1ten Gl.) — Log. (S — dem l. Gl.)

8) $\text{Z. d. Gl.} = \frac{(\text{Log. v d. Z.}((\text{Log. d. S.} + \text{Log.}(\text{Exp.} - 1) + 1\text{te Gl.} - \text{Log. d. } 1\text{ten Gl.}}{\text{Log. des Exp.}}$

Ferner im §. 272, bey unendlich abnehmenden Progressionen.

9) Log. d. S. = (Log. d. 1ten Gl. + Log. des Nenn. des Exp.) — Log. (Nenner — Zähler d. Exp.)

Beyspiele.

1.

Gegeben	Zu finden
d. 1te Gl. = 3	d. 1. Gl.
Z. d. Gl. = 12	
Exponent = 2.	

Log. 2 = 0,3010300

× 11

3,3113300

Log. 3 = 0,4771213

3,7884513

Dazu gehörige Zahl = 6144.

2.

Gegeben	Zu finden
d. l. Gl. = 49152	d. 1te Gl.
Z. d. Gl. = 15	
Exponent = 2	

Log. 49152 = 4,6915412

Log. 2 = 0,3010300

× 14

4,2144200

0,4771212

Dazu gehörige Zahl = 3.

3.

Gegeben	Zu finden
d. 1te Gl. = 1	d. Expon.
d. l. Gl. = 1024	
Z. d. Gl. = 6	

Log. 1024 = 3,0103000

Log. 1 = 0,0000000

: 5) 3,0103000

0,6020600

Dazu gehörige Zahl = 4.

4.

Gegeben — Zu finden

d. 1te Gl. = x — d. 3. d. Gl.

d. 1. Gl. = 4096

d. Exp. = 4

Log. 4096 = 3,6123599

Log. x = 0,0000000

$$\text{Log. } 4 = \frac{3{,}6123599}{0{,}6020600} = 6.$$

Daher 6 + 1 = 7 = d. 3. d. Gl.

5.

Gegeben — Zu finden

d. 1te Gl. = 2 — d. Summe

d. 3. d. Gl. = 5

der Exponent = 3

a) Log. 2 = 0,3010300

5 × Log. 3 = 2,3856065

2,6866365

Dazu gehörige Zahl = 486

— 2

484

b) Log. 484 = 2,6848454

Log. (3 — 1) = = 0,3010300

2,3838154

Dazu gehörige Zahl = 242.

6.

Gegeben — Zu finden

die Summe = 781 — d. 1te Gl.

der Exponent = 5

d. 3. d. Gl. = 5

a) Log. 781 = 2,8926510

Log. 4 = 0,6020600

3,4947110

b) Log. 5 = 0,6989700

× 5

3,4948500

Dazu gehörige Zahl = 3125

— 1

3124

3,4947110

c) Log. 3124 = 3,4947110 = 1.

7.

Gegeben — Zu finden

die Summe = 1365 — d. Exp.

d. 1te Gl. = 1

d. 1. Gl. = 1024

Log. 1364 = 3,1348144
Log. 341 = 2,5327544

0,6020600

Dazu geh. Zahl = 4.

8.

Gegeben	Zu finden
die Summe = 255	d. Z. d. Gl.
d. Expon. = 2	
d. 1te Gl. = 1	

a) Log. 255 = 2,4065402
Log. (2 — 1) = 0,0000000

2,4065402

Dazu gehörige Zahl = 255

+ 1

256

b) Log. 256 = 2,4082400
Log. 1 = 0,0000000

2,4082400

c) 2,4082400 / Log. 2 = 0,3010300 = 8.

9.

Gegeben	Zu finden
d. 1te Gl. = 1	d. Summe.
d. Expon. = $\frac{1}{2}$	

Log. 1 = 0,0000000

Log. 2 = 0,3010300

0,3010300

Log. (2 — 1) = 0,0000000

0,3010300

Dazu gehörige Zahl = 2.

Verlags-Bücher
der
Macklotischen
Hofbuchhandlung und Hofbuchdruckerey
in Carlsruhe.

Abbadie, (Jacob) Von der Wahrheit der christlichen Religion. Aus dem Französischen, mit einer Vorrede, einem, aus den besten Quellen geschöpften und mit neuen Beiträgen vermehrten Verzeichniß der vorzüglichsten Beweis- und Schutz-Schriften für die Wahrheit der christlichen Religion, wie auch mit berichtigenden und erläuternden Anmerkungen begleitet von Hahn, drey Bände 8. 1788. 4 Thlr. 8 gr. od. 7 fl.

Abhandlnngen, (neue) von dem Baum Acacia oder dem Schotendorne. Aus dem Französischen mit einer Vorrede von Reinhard 8. 1786. 3 gr. od. 12 kr.

Anleitung (vollständige und aus vieljähriger Erfahrung vollkommen gegründete) sowohl zur Seidenzucht, als auch zum Pflanzen und Beschneiden der Maulbeerbäume, nebst einer Widerlegung einiger bei dieser Zucht eingeschlichenen Mißbräuche und Vorurtheile 8. 1796. 4 gr. od. 16 kr.

Arzneymittel, (bewährte) für Rindvieh, Schweine, wie auch Gänse und Hühner 8. 1½ gr. od. 6 kr.

Aufmunterung (treu gemeinte) des Baden-Durlachischen Landmanns zur Bienenzucht; wobei die großen Vortheile der Magazin-Körbe vor den bisher gewöhnlich einzelnen Behältnissen gezeigt werden. Mit einer Kupfertafel. 8. 1771. 4 gr. od. 15 kr.

Bayerische Staatsbibliothek München

Aufmunterung (patriotische) des Badischen Landmanns zu der Bienenzucht; 8. 1771. 3 gr. od. 12 kr.

Baurittels (C. W.) practische Anleitung zu den bey Stadt = Land = und Amt = Schreibereyen vorkommenden Geschäften, 3 Bände. Mit vielen Tabellen 8. Neue Auflage 1808. 4 Rthlr. od. 6 fl.

—— Abhandlungen über den Entwurf einer allgemeinen Instruction, neben besondern Dienstanweisungen für Bad. Beamte 8. 1803. 3 gr. od. 12 kr.

Berliner (Her. Moses, eines Israelitischen Gelehrten) Spiegel der Tugend und Weisheit für unsre jetzige Zeiten, zur Herstellung der wahren Menschheit 8. 1800. 12 gr. od. 48 kr.

Beschreibung, (geograph.) der Landvogtey Ortenau und der an diesem Landesbezirk liegenden Klöster, Schlösser, Dörfer, Flecken, Seen ꝛc. dann, von den dreien Städten Offenburg, Gengenbach und Zell am Harmersbach, vom Fleiß der Einwohner ꝛc. 8. 1795. 9 gr. od 36 kr.

Beweis, daß die bey den Protestanten üblichen Ehescheidungen vom Bande auch nach kathol. Grundsätzen gültig sind, und daß diese Ehescheidungen vom Bande auch bey den Katholiken in wichtigen Fällen eingeführt werden könnten und sollten. Nebst zweyen Gutachten von Heidelberg und Würzburg, die das Gegentheil dieses Satzes behaupten gr. 8. 1804.

Beytrag zur deutschen Landstaatsrechtslehre. 4. 1786. 12 gr. od. 48 kr.

Bayerische Staatsbibliothek München

Aufmunterung (patriotische) des Badischen Landmanns zu der Bienenzucht; 8. 1771. 3 gr. od. 12 kr.

Baurittels (C. W.) practische Anleitung zu den bey Stadt = Land = und Amt = Schreibereyen vorkommenden Geschäften, 3 Bände. Mit vielen Tabellen 8. Neue Auflage 1808. 4 Rthlr. od. 6 fl.

—— Abhandlungen über den Entwurf einer allgemeinen Instruction, neben besondern Dienstanweisungen für Bad. Beamte 8. 1803. 3 gr. od. 12 kr.

Berliner (Her. Moses, eines Israelitischen Gelehrten) Spiegel der Tugend und Weisheit für unsre jetzige Zeiten, zur Herstellung der wahren Menschheit 8. 1800. 12 gr. od. 48 kr.

Beschreibung, (geograph.) der Landvogtey Ortenau und der an diesem Landesbezirk liegenden Klöster, Schlösser, Dörfer, Flecken, Seen ꝛc. dann, von den dreien Städten Offenburg, Gengenbach und Zell am Harmersbach, vom Fleiß der Einwohner ꝛc. 8. 1795. 9 gr. od 36 kr.

Beweis, daß die bey den Protestanten üblichen Ehescheidungen vom Bande auch nach kathol. Grundsätzen gültig sind, und daß diese Ehescheidungen vom Bande auch bey den Katholiken in wichtigen Fällen eingeführt werden könnten und sollten. Nebst zweyen Gutachten von Heidelberg und Würzburg, die das Gegentheil dieses Satzes behaupten gr. 8. 1804.

Beytrag zur deutschen Landstaatsrechtslehre. 4. 1786. 12 gr. od. 48 kr.

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wucherer, Gustav Friedrich,

Die Größenlehre, für Realschulen populär bearbeitet

Bd.: 1,3

Carlsruhe 1810
BHS II K 32-1,1/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708122-9